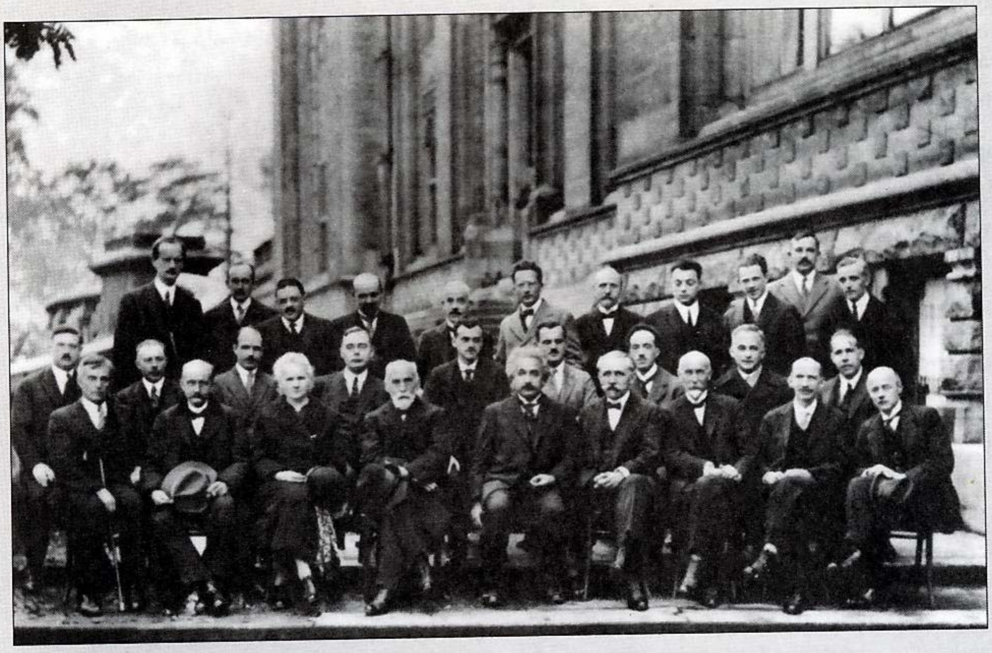
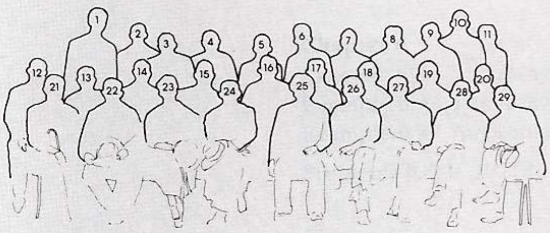
1 상대성 이론

1-1 서론





1. A. Piccard
2. E. Henriot
3. P. Ehrenfest
4. E. Herzen
5. Th. de Donder
6. E. Schroedinger
7. E. Verschaffelt
8. W. Pauli
9. W. Heisenberg
10. R.H. Fowler
11. L. Brillouin
12. P. Debye
13. M. Knudsen
14. W.L. Bragg
15. H.A. Kramers
16. P.A.M. Dirac
17. A.H. Compton
18. L.V. de Broglie
19. M. Born
20. N. Bohr
21. I. Langmuir
22. M. Planck
23. M. Curie
24. H.A. Lorentz
25. A. Einstein
26. P. Langevin
27. C.E. Guye
28. C.T.R. Wilson
29. O.W. Richardson

The "architects" of modern physics. This unique photograph shows many eminent scientists who participated in the fifth international congress of physics held in 1927 by the Solvay Institute in Brussels. At this and similar conferences, held regularly from 1911 on, scientists were able to discuss and share the many dramatic developments in atomic and nuclear physics. This elite company of scientists includes fifteen Nobel prize winners in physics and three in chemistry. *(Photograph courtesy of AIP Niels Bohr Library)*

◻ 기본적인 개념

1. 공간(space),시간(time),질량(mass) : 3 가지의 기본 물리량, 기본량
2. 물리학에서는 기본 물리량으로 존재(存在)를 기술한다.
   존재의 존재방식 : 공간, 시간
   존재 : 질량

존재하는 모든 것은 질량을 갖는다.

물질은 질량을 갖는다.
복사에너지(존재)도 질량을 갖는다.

◻ 좌표계(Coordinate System)

1. 공간상의 물체의 위치 정의
2. 기준점: 좌표의 원점 , 좌표 :척도

◻ Newton의 절대시간, 절대공간의 개념

Philosophie Naturalis Principia Mathematica, 1687년

'절대적이고 진실로 수학적인 시간은 자연스럽게, 또 속성상 외부와 아무 관련 없이 잔잔히 흐른다. 그래서 다른 이름으로 지속시간이라고도 한다. 절대공간도 속성상 외부와 아무런 관련 없이 항상 유사하고 또한 부동의 상태로 있다.'

Mach(1838∼1916) The Science of Mechanics

'A critical and Historical Account of its Development(1907)'
Newton은 관측 가능한 현상에서 직접 추론하거나 이에서 유도할 수 있는 결과 이외에는 아무것도 과학이론의 기본 전제로 받아들이지 않는다. 즉 '어떤 가정도 설정하지 않는다.'고 천명하였는데 실제로는 정 반대로 행동했다. : Math의 주장(Newton에 대한 비판)
Newton의 시간과 공간에 대한 이러한 이율배반적인 태도는 '현상으로 설명하거나 귀납적으로 추론할 수 없어서' 도저히 다른 방도가 없었기 때문이라고 볼 수 있겠다. 그러나 '어떤 가정도 설정하지 않는다.'는 법칙에 (철저히) 따르지 못했다.

Minkowski(1908), 시간과 공간에 대한 새로운 패러다임

'여러분! 내가 지금 여러분에게 말씀드리는 시간과 공간에 대한 견해는 실험물리학이라는 토양에서 싹튼 것이기에 강한 힘을 가지고 있습니다. 이것은 혁명적인 생각입니다. 지금부터는 공간만의 자체, 시간만의 자체는 각각 따로 아무 의미가 없고 어둠속으로 사라져야 합니다. 오직 시간과 공간이 한 결합체로서 독립성을 갖게 될 것입니다.'

1.1 특수 상대론

- 빛과 다른 전자기파(electromagnetic radiation)의 자유공간(진공)에서의 전파속도는

  $c = 3.00 \times 10^8 \mathrm{m/s}$: 속도의 상한
- 속도의 상한 : 물체나 역학적 파동의 속도는 광속을 초과할 수 없고, 같을 수도 없다.

  실험적 사실 : $v < c$, 입자가속기에서의 가속입자의 속도는 광속(c)을 초과하지 않는다.
- 그러나 Newton 역학은 속도의 상한에 대한 실험적 사실과 부합하지 않는다.

  Newton Mechanics : 물체에 일정한 힘이 계속 작용하면 광속을 능가하여 계속적으로 속도가 증가한다.
- Einstein은 특수상대론(special theory of relativity, 1905년, 나이 26세)을 발표하면서 다음과 같이 쓰고 있다.

  "상대론은, 돌파구가 없어 보이는, 고전이론의 심각하고 중대한 모순을 극복하기 위한 필요성에 의해 탄생하였다. 이 새로운 이론의 강점은, 단지 몇 개의 매우 설득력 있는 가정만으로 고전물리의 이러한 난제들을 간단하고도 모순 없이 해결해 버린다는 데 있다."
- Newton 역학은 일상적인 속도 영역($v \ll c$)의 운동 물체의 기술에는 매우 성공적

  $c = 3.00 \times 10^8 \mathrm{m/s}$: 속도의 상한
- Newton 역학은 Einstein의 일반화된 이론(상대론)의 근사적 관계
- 특수상대론으로서 설명되는 현상들

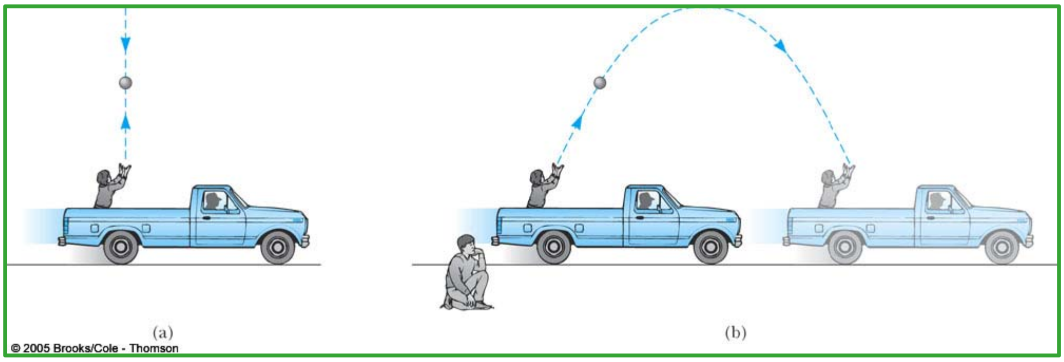
  시간지연과 길이수축 : 운동하는 기준계에서의 시간과 길이를 다른 기준계에서 측정하면 시간은 느려지고 길이는 수축된다.

  $E = mc^2$: 질량-에너지 동등성의 원리, 핵에너지의 근거
- GPS : 광속불변의 원리를 이용한 것

1.2 상대성 원리

기준틀(frame of reference, 기준계)

1. 물체의 운동을 기술하기 위해 공간(시간)을 수량화한 것
2. 물체의 위치나 속도는 항상 어떤 기준계에 대한 상대적인 값이다.



- 위 그림은 기준계에따라 물체의 속도가 달리 표현됨을 보여준다. 어느 쪽이 더 타당한가?
- 보통의 경우 물체의 속도는 지표면에 대한 상대속도를 의미한다. 그런데 이 지표면 기준계는 태양 기준계에서 보면, 공전과 자전속도를 더하면 거의 $\approx 30 \mathrm{km/s}$의 속도를 갖는 기준계이다.

관성기준틀

1. 아무런 힘을 받지 않는 물체가 일정한 속도를 갖거나 정지해 있는 기준틀
2. 관성기준틀에 대해 일정 속도로 상대운동하는 기준틀도 관성기준틀이다.

Newton의 상대성(principle of Newtonian relativity)

1. 모든 관성기준계에서의 역학법칙은 동등하다.
2. 역학적으로 기준계의 절대속도를 줄 수 있는 방법은 없다.

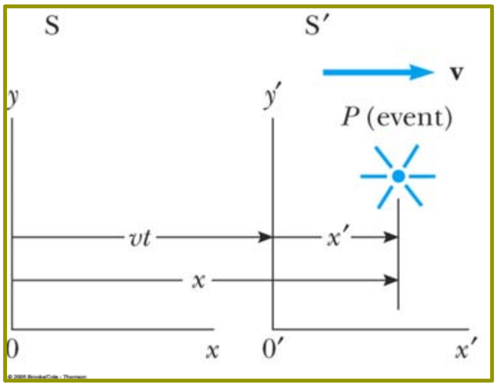
공변성(covariant)

모든 관찰자는 동등하고 자연의 법칙은 모든 관찰자들에게 동일한 수학적 형태를 갖는다.

Galilean transformation of coordinates

서로 상대운동하는 두 관성기준계 S and S′

1) S′기준계는 xx'축을 따라 $\vec{v}$로 S기준계에 대해 운동
2) at $t = t' = 0$, 두 기준계의 원점이 일치



어떤 사건(event, 물리적 사건)이 P 지점에서 일어나서 이 지점을 S 계와 S' 계에서 (x,y,z,t) and (x',y',z',t')로 표시하면

$$x' = x - vt \qquad (1.1)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

갈릴레이 좌표변환(Galilean transformation of coordinates)

'네 번째 좌표, 시간 혹은 시각(t)는 두 기준계에서 같다'고 가정

→ 어떤 사건의 시간간격은 두 기준계에서 동일하게 측정된다.

Galilean addition law for velocities

두 기준계에서의 속도의 변환

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$

혹은

$$u_x' = u_x - v \qquad (1.2)$$

역학에서 당연한 이 속도의 변환관계는 전자기학(전자기파동, 빛)에서는 심각한 차이로 나타난다.

두 기준계에서의 가속도

$dt = dt'$, and $v = \text{const}$로 가정하면

$$\frac{du_x'}{dt'} = a_x' = a_x \qquad (1.3)$$

길이, 시간간격, 가속도는 갈릴레이 변환에서 불변이다.

예제 1.1 $F_x = ma_x$는 갈릴레이 변환에서 공변이다.

공변성(covariant) : 다른 위치에서 다른 운동을 하고 있는 관찰자들에게 물리법칙이 동일한 수학적 형태를 보이는 것.

S계에서 $F_x = ma_x$ 가 성립할 때, S'계에서 $F_x' = m'a_x'$이면 → 물리법칙의 공변

(풀이)

갈릴레이 변환에서

$$a_x' = a_x \text{ and } m' = m$$

F_x가 m과 m과상호작용하는 입자들 간의 상대적 위치에만 의존한다면

$F_x = f(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \cdots)$이면 Δx는 불변이기 때문에

$$F_x = F_x'$$

즉

$$F_x' = m' a_x' \quad \rightarrow \quad \text{Newton의 제2법칙의 공변성}$$

연습문제 2 선운동량 보존은 갈릴레이 변환하에서 공변이다

빛의 속력(The Speed of Light)

- 역학(Mechanics)에서의 'Newton의 상대성'과 'Galilei의 속도의 변환'이 전자기학 혹은 광학에서도 성립할까?

  자유공간(free space, 진공)에서의 빛의 속도 c : Maxwell(1860)

  $$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 3.00 \times 10^8 \mathrm{m/s}$$

- 빛이 파동이라면 이 빛의 속도는 무엇에 대한 속도인가?

  $'ether'$: 1800년대에 빛의 매질로 가정된 물질(?)

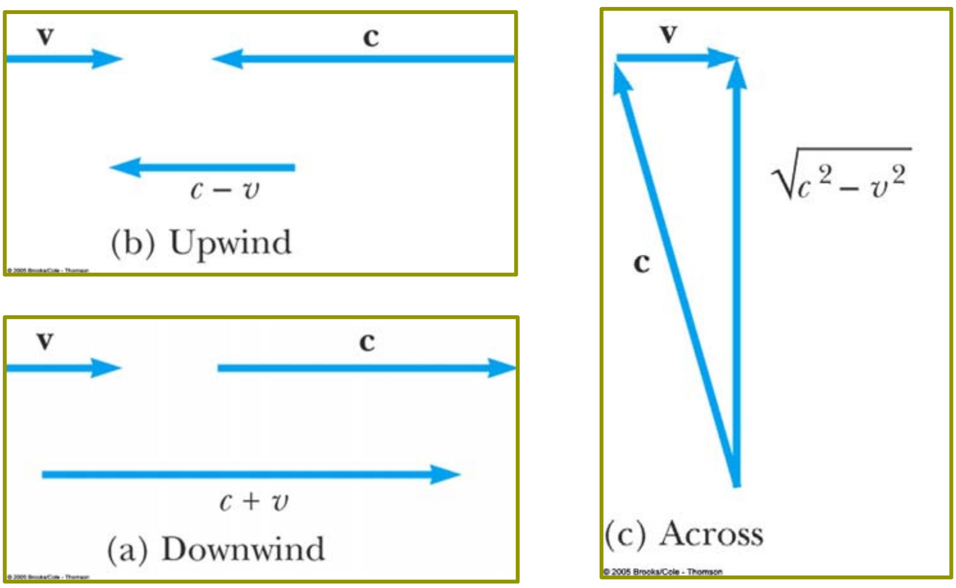
  1) 빛의 속도란 이 $'ether'$에 대한 상대속도 이다.
  2) 관측자가 이 $'ether'$기준계에 대해 v로 운동한다면 빛의 속도는 $c \pm v$로 변할 것이다.
  3) $'ether'$ 기준계는 '절대정지 기준계'의 역할을 할 수 있겠다.

음파의 속도 : 공기매질 기준계에 대한 상대속도.

소리의 속도는 공기매질에 대해 음원이나 관측자가 운동할 때 어떻게 변하는가?

→음원의 운동과는 관계가 없고 다만 관측자의 공기매질에 대한 상대속도에 따라 관측되는 소리의 속도가 달라진다.

$'ether'$의 바람속에서의 광속



(b) Upwind

(a) Downwind

(c) Across

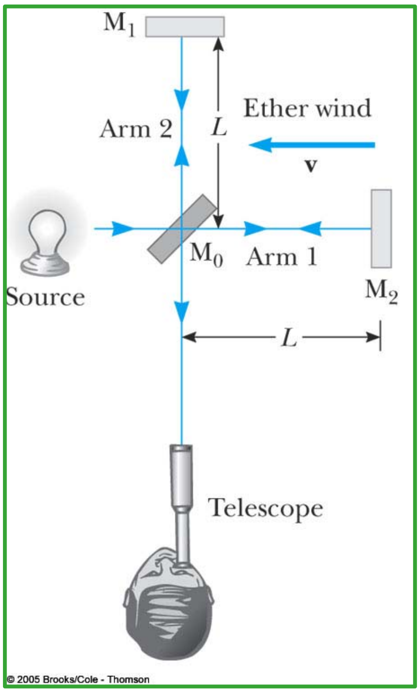
1-3 Michelson-Morley의 실험

배경 : 빛의 파동론(회절, 간섭, Maxwell의 방정식에 의한 전자파의 예견)
Ether : 빛의 매질로 가정된 물질(?)
Ether(빛의 매질)이 존재한다면 Ether에 대한 관측자의 운동에 따라 광속이 다르게 관측될 것이다.

- Ether에 대한 지구의 속도가 v 일때

지구상에서의 광속측정에서 지구의 속도가 측정 광속에 미치는 효과는 second order term v^2/c^2에 관계한다.

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$



$$(1+x)^n = 1 + nx + \ldots \quad (\ x \ll 1 \text{ 일 때})$$

$$\therefore t_1 = \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \ \ldots\ \right)$$

여기서 $v \cong 3 \times 10^4 \mathrm{m/s}$: 지구의 공전속도

$$t_2 = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right)$$

t_1 과 t_2 의 차이는

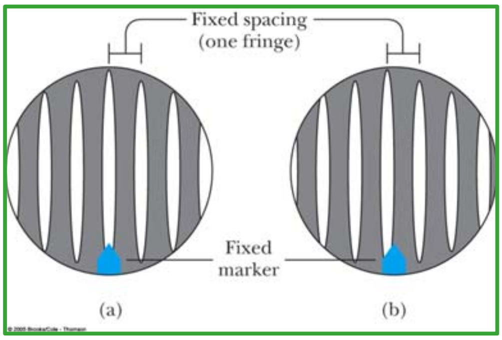
$$\Delta t = t_1 - t_2 \cong \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{Lv^2}{c^3} \qquad (1\text{-}4)$$

이 장치를 90° 회전시키면 2 배의 효과가 나타나서, 위상의차이로 표현하면

$$\Delta\phi = 2c\Delta t \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi L v^2}{\lambda c^2}$$

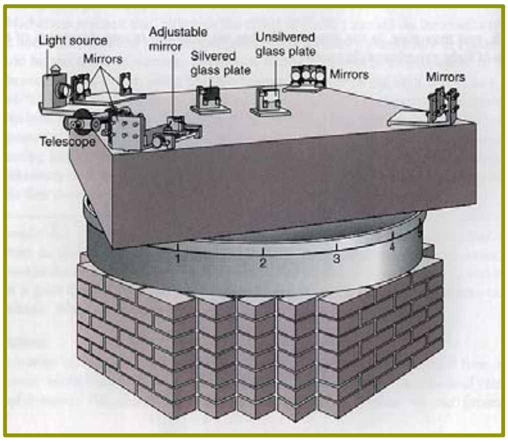
파장수로 표현하면

$$\Delta N = \frac{2c\Delta T}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$



Michelson의 실험

1. 1881년
    L = 1.2 m, λ = 5.9 × 10^{-7} m
    v^2/c^2 = 10^{-8} 을 대입하면
    $\Delta N \cong 0.04$ ☞ 실험불확정도
    ⇒ 아무런 무뉘이동도 관측하지못하였다.
2. 1887년 Michelson, Edward W. Morley
    중복반사장치 : L = 11 m
    $\Delta N \cong 0.4$ ☞ 관측가능한 최소값의 20-40배
    ⇒ 아무런 무뉘도 관측되지 않았다.



※ 시도된 설명
1. 지구가 ether을 끌고간다. ↔ 광행차 (aberration of light)에 모순
2. Lorentz-Fitzgerald 수축 ; 물체는 운동방향으로 수축된다.

Einstein의 설명

절대 ether계는 없다
→ 절대운동은 검출될 수 없다.
→ 절대정지기준계는 없다.

1.4 특수 상대론의 가설들

특수상대론의 가정

Einstein 의 가설(The Eistein postulates)

1905, 'On the electrodynamics of moving bodies'

1. 상대성 원리 : 모든 물리법칙은 모든 관성기준계에서 같다. 절대적이고 균일한 운동은 검출될 수 없다.
    The Principle of relativity : The laws of physics are the same in all inertial reference frames. Absolute, uniform motion cannot be detected
2. 광속불변의 원리 : 진공 중에서의 광속은 상수 c와 같고, 광원의 운동에 무관하다.
    The speed of light in a vacuum is equal to the value c, independent of the motion of the source.

    $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$: 진공중의 광속

제 1 가정의 다른 표현 :

1. 서로 등속도운동하는 두 좌표계에서의 물리법칙은 동일하다.
    - Mechanics(역학) : 서로 등속도 운동을 하는 좌표계는 역학적으로 동일하다.
    - 제 1 가정 은 전기역학과 광학의 법칙도 역학과 마찬가지로 서로 등속도 운동하는 두 좌표계의 우열은 없다는 표현이다.
    - 서로 등속도로 상대운동하는 두 좌표계는 물리적으로 동등하다는 표현. 즉 물리적으로 절대속도를 줄 수 있는 방법은 없고 다만 상대속도만이 의미를 갖는다는 말이다.

제1가정(상대성 원리)과 광속불변의 원리는 완전히 독립적인가?

⇒ 광속이 불변하지 않다면 이것으로 절대적이고 균일한 운동을 검출할 수 있다.

A : 광원 B와 정지한 관측자

B : 광원

A′ : 광원과 상대운동중인 관측자가 운동하는 경우

A가 관측한 광속 = C

A′가 관측한 광속 = ?

가정 Ⅰ로 → A′가 정지 A가 운동한다고 보면

가정 Ⅱ에 의해 → 광원의 운동에 상관없다.

∴ A′가 관측한 광속 = C

⇒ 광속불변

그러나 음파의 경우

매질(공기)에 대해 : A, B는 정지, A′는 V로 운동한는 경우

가정 Ⅰ, Ⅱ에 의해 → A′가 관측한 음속= C + V

⇒ 음원(관측자)의 운동에 따라 음속이 다르게 관측된다.

? ?????????????

광(빛)과 소리는 왜 이러한 차이를 보이는가?

물리법칙의 공변성

다른 관성기준계에서 모든 물리법칙이 갈릴레이 변환에서 공변성이 성립하지 않는다.

로렌츠 변환 : 모든 물리법칙의 공변성이 성립

Newton의 운동법칙($\vec{F} = m\vec{a}$)은 로렌츠 변환에서 공변하지 않으므로 새로 정의되어야 한다.

1-5 특수상대론의 결과

시간지연, 길이수축, 동시계념과 시계의 동시화

상대적으로 운동하고 있는 관측자들이 『동일 대상』에 대한 측정한 결과들을 비교한다.

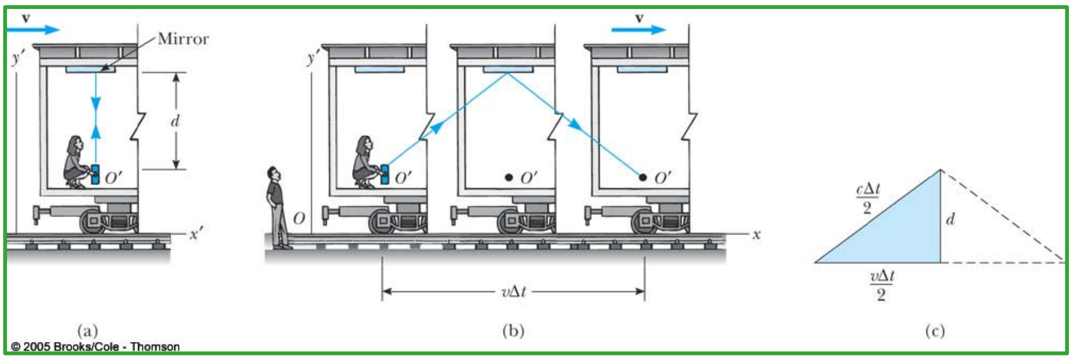
서로 정지하고 있을 때 동일한 시계와 자를 사용한다.

S 기준계 : (x, y, z, t), 정지계(운동계)

S′ 기준계 : (x′,y′,z′,t′), 운동계(정지계)

시간팽창(시간지연)

거울로부터 d거리 떨어져 정지하고 있는 S′계의 관측자 O′



S′계에서의 빛의 왕복시간

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

S 계에서의 측정시간

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Delta t' = 2d/c$ 이므로

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$

여기서 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

즉 $\Delta t \geq \Delta t'$,

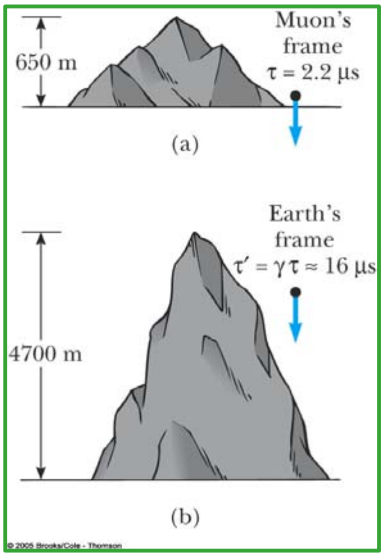
⇒ 관측시간은 고유시간보다 길게 관측된다.

⇒ 움직이는 시계는 천천히 간다.

▶ 고유시간 : 두 사건이 일어날 때 그 사건들과 같은 위치(사건들과 상대적으로 정지한 상황)에 있는 관측자가 측정한 두 사건간의 시간 간격

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \qquad (1\text{-}9)$$

μ 중간자(뮤온)의 붕괴



뮤온: 전자와 같은 전하, 207배의 질량을 가진 불안정한 기본 입자.

$\tau = 2.2\mu\text{s}$: 중간자의 평균수명, 고유시간

$v = 0.99\text{c}$: 중간자의 속력

이동거리

$S = v\tau \simeq 650\text{m}$

많은 뮤온들이 대기 상층부로부터 지표면까지 도달한다.

$\gamma\tau \approx 16\mu s$: 지표상의 관찰자가 측정한 평균수명

이동거리

$\gamma v \tau \approx 4700\text{m}$

- 1976년 CERN 실험실에서 뮤온의 수명이 증가함을 증명
- 제트비행기와 지상의 원자시계를 서로 비교하여 증명(1972)

예제 1.2 진자의 주기는 얼마인가?

$T_p = 3.0\text{s}$ $v = 0.95c$ 일 때 관찰자가 측정한 진자의 주기는?

(풀이)

$$T = \gamma T' = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.95c)^2/c^2}} 3.0\text{s} = 9.6\text{s}$$

연습문제 3. 관찰자의 속력이 5.0% 빨라지면 이 관찰자가 측정하는 진자의 주기는 얼마가 되는가?

$$T = \gamma T' = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.95 \times 1.05 \times c)^2/c^2}} \times 3.0\text{s} = 42\text{s}$$

길이의 수축(length contraction)

속도와 이동 시간으로 길이를 제는 두 가지 방법

1. 첫째방법 : 정지한 막대 위에서 움직이고 있는(속도 v) 물체의 통과시간(Δt)

$L_p = v\Delta t$; 고유길이

이때 관측자는 막대와 상대적으로 정지해 있다.

2. 둘째방법 : 관측자가 직접 막대 위를 달려서 통과시간을 측정하여 길이를 재는 방법

이 때 관측자 기준으로는 막대가 움직이는 꼴이므로 운동하는 막대의 길이를 측정한 셈이다.

$L_p = x_2 - x_1$: S 계에서 좌표(자)로 측정한 길이, 고유길이

$L_p = v\Delta t$: S 계에서 움직이는 물체로 측정한 길이, 고유길이

$L = v\Delta t' = v\dfrac{\Delta t}{\gamma}$: S' 계에서 움직이는 물체(S 계에 고정된 막대)의 길이를 측정

관측길이

$$L = L_p\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- Lorentz−Fitzgerald 수축
- 움직이는 방향으로의 길이는 짧게 관측된다.

※뮤온의 붕괴

뮤온입장 : 2.2μs 동안 650m 진행

$$L_p = 4700\text{m},\ L = \frac{L_p}{\gamma} = 650\text{m}$$

예제 1.3 우주선의 수축

우주선의 길이 $L_p = 100\text{m}$, $v = 0.99c$의 속력으로 지나간다면 관측된 우주선의 길이는?

(풀이)

$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (100\text{m})\sqrt{1 - \frac{(0.99\text{c})^2}{\text{c}^2}} = 14\text{m}$$

연습문제 4.

이 우주선의 속력이 0.01000c 라면 이 관찰자가 보는 우주선의 길이는?

(답) 99.99m

예제 1.4 우주선의 고도

우주선, 435m의 고도, 지구를 향해 0.970c의 속력일 때 우주선 내의 관찰자가 측정한 우주선의 고도는 얼마?

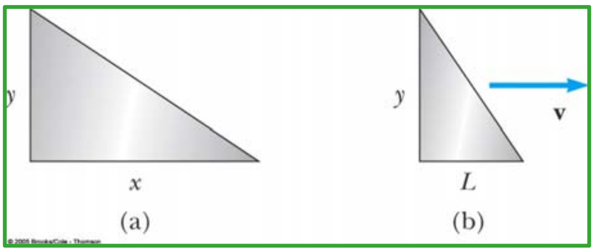
(풀이)

$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (435\text{m})\sqrt{1 - \frac{(0.970\text{c})^2}{\text{c}^2}} = 106\text{m}$$

예제 1.5 삼각형 우주선

$x = 50.0\text{m}$, $y = 25.0\text{m}$, $v = 0.950\text{c}$일 때 움직이는 우주선의 모양은?

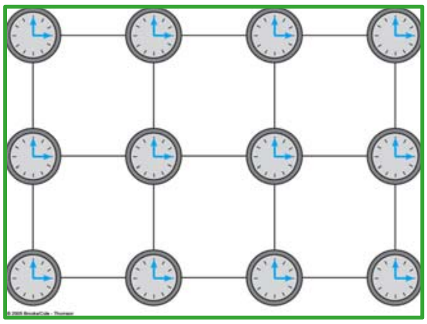
$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 15.6\text{m}$$



동시성과 시계의 동시화

한 기준계의 여러 장소에서 일어난 사건을 기록하는 방법

1. 한 지점의 기준시계로 측정 : 그 지점에 도달하는 빛으로 측정하여 거리에 따라 지연된 시간을 고려
2. 모든 지점에 설치된 동시화 된 시계로 사건이 일어난 지점에서 측정



동시의 조작적 정의

- 동일한 두 시계를 두 지점에 두고 정해진 시각에 빛을 발사하고 중간지점에서 그 빛을 동시에 관측했다면 ⇒ 두 시계는 동시
- 한 기준계의 두 지점에서의 동시는 이 기준계와 운동하는 기준계에서는 동시가 아니다.

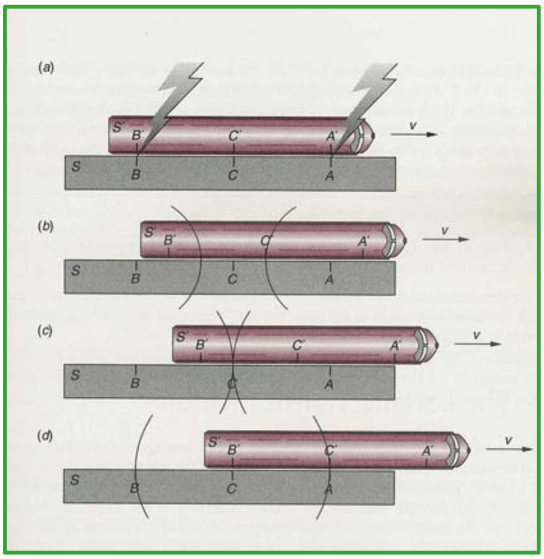
S계에서의 시간차이

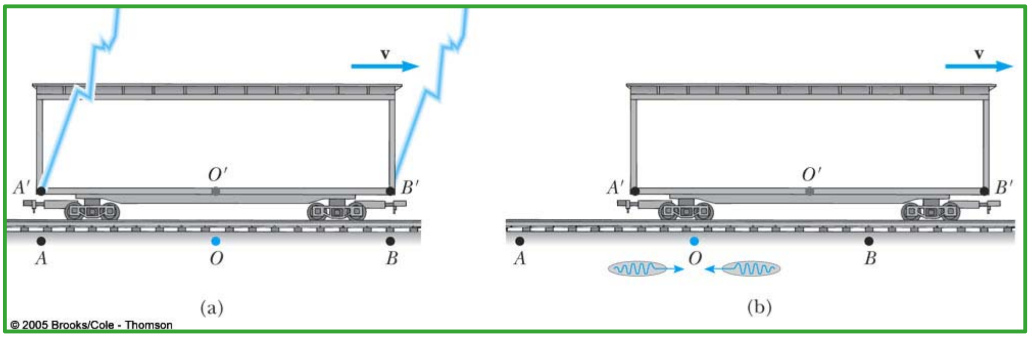
$$\Delta t = t_A - t_B = \frac{1/2L}{c-V} - \frac{1/2L}{c+V} = \frac{LV}{c^2 - V^2} \qquad : \quad \text{측정시간}$$

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{V}{c^2}\frac{L}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad : \quad \text{고유시간}$$

$$\text{or} \quad t'_A - t'_B = \frac{V}{c}\frac{L_0}{c}$$

- 고유길이 L_0만큼 떨어져 있는 두 시계가 정지계에서는 동시일 지라도 두 시계가 속력 V 로 운동하는 기준계에서는 동시가 아니다. 즉 뒤 따라가는 시계는 VL_0/c^2만큼 빠르다.





1-6 Lorentz 변환

Galilei 변환

V로 상대운동하는 두 좌표계에서 한 물체의 운동을 기술한다.

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \overset{\text{역변환}}{\Leftrightarrow} \qquad \begin{aligned} x &= x' + Vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

$$u_x' = u_x - V$$
$$u_y' = u_y$$
$$u_z' = u_z$$
$$a_x' = a_x, \quad a_y' = a_y, \quad a_z' = a_z$$

Newton의 법칙이 한 기준계에서 성립하면(관성기준계) 이 기준계에 대해서 일정한 속도로 운동하는 어떤 기준계에 대해서도 성립한다. : Newton의 상대론

상대론적 변환식(Lorentz 변환의 유도)

1. Einstein의 가정을 만족
2. 선형
3. V/c→0 인 경우 ⇒ Galilei변환

$$x' = G(x - vt) \qquad (1.16)$$

$v/c \to 0$ 일 때 $G \to 1$

$$x = G(x' + vt') \qquad (1.17)$$

(1.16)을 (1.17)에 대입하여 t'에 대하여 정리하면

$$t' = G\left\{t + (1/G^2 - 1)\frac{x}{v}\right\} \qquad (1.18)$$

(1.16)과 (1.18)을 미분하면

$$dx' = G(dx - vdt) \qquad (1.19)$$

$$dt' = G\left\{dt + (1/G^2 - 1)\frac{dx}{v}\right\} \qquad (1.20)$$

$u_x' = dx'/dt'$의 형태로 만들고 간단하게 정리하면

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 + (1/G^2 - 1)(u_x/v)} \qquad (1.21)$$

빛의 속도는 모든 관찰자에게 c 이므로, $u_x = c$ 이면 $u_x' = c$ 이어야 한다.

$$c = \frac{c - v}{1 + (1/G^2 - 1)(c/v)} \qquad (1.22)$$

이 되고 이를 풀면

$$G \equiv \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$x' = \gamma(x - vt)$, $x = \gamma(x' + vt')$ 이 되고 시간변환은 (1.18)식에 $G = \gamma$를 대입하여

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad : \text{ 시간변환}$$

Lorentz Transformation

$$x=\gamma(x'+vt')$$
$$y=y'$$
$$z=z'$$
$$t=\gamma(t'+\frac{vx'}{c^2})$$

이 식은 (x',y',z',t') 를 (z,y,z,t)로 변환하는 식

역변환

$$x'=\gamma(x-vt)$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=\gamma(t-\frac{vx}{c^2})$$

이 식은 (z,y,z,t) 를 (x',y',z',t')로 변환하는 식

1. 시간지연

$\Delta t'=t_2'-t_1'$: S' 계의 x_0'에 고정된 시계로측정

→ x_0'에 고정되어 발생하는 사건의 시간간격, 고유시간

$\Delta t=t_2-t_1$: S 계에서 측정한 시간, 측정시간

→ x_0'(사건이 일어난 지점)은 S계에서 보아 움직이고 있으므로, 측정시간

$$t_2=\gamma(t_2'+\frac{x_2'v}{c^2})=\gamma(t_2'+\frac{x_0'v}{c^2})$$
$$t_1=\gamma(t_1'+\frac{x_1'v}{c^2})=\gamma(t_1'+\frac{x_0'v}{c^2})$$
$$\Delta t=t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1')=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

고유시간보다 길게 관측된다.

2. 길이의 수축

x_2', x_1'가 양끝점인 막대의 길이 측정

고유길이가 $L_0=x_2'-x_1'$인 막대가 S계에서 볼 때 x방향으로 V로 운동한다.

$$L=x_2-x_1 \quad : \quad \text{관측길이}$$

$$x_2'=\gamma(x_2-vt_2)=\gamma(x_2-vt_0)$$

$$x_1'=\gamma(x_1-vt_1)=\gamma(x_1-vt_0)$$

⇒ x_1, x_2 지점의 눈금을 동시(t_0)에 측정하므로

$$\therefore x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'}{\gamma}$$
$$\text{or} \quad L=L_p\sqrt{1-v^2/c^2}$$
$$i.e. \quad L<L_p$$

운동방향으로의 길이는 짧게 관측된다.

3. 시계의 동시화

S'계에서 동시인 두 시계

x_2'(시계 B'), x_1'(시계 A')의 시계는 S 계에서 t_0 일 때 몇 시를 가리키겠는가?

$$t_B' = \gamma\left(t_0 - \frac{x_2 v}{c^2}\right)$$

$$t_A' = \gamma\left(t_0 - \frac{x_1 v}{c^2}\right)$$

$$t_A' - t_B' = \gamma(x_2 - x_1)\frac{v}{c^2} = \frac{L_p v}{c^2}$$

$here \quad L_p = \gamma(x_2 - x_1) = x_2' - x_1'$: 두 시계사이의 고유거리

Lorentz 변환식으로부터 시간지연의 이해

S계의 시계 A(x_1), B(x_2)로 S'계의 시계 A'가 x_1을 지나(t_1), x_2 지점을 통과(t_2)하는 데 걸리는 시간을 측정한다.

1) $(x_1, t_1) \Leftrightarrow (x_1', t_1')$: A'가 A를 통과할 때

$$x_1' = \gamma(x_1 - Vt_1) \qquad (1)$$

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2}\right) \qquad (2)$$

2) $(x_2, t_2) \Leftrightarrow (x_1', t_2')$: A'가 B를 통과할 때

$$x_1' = \gamma(x_2 - Vt_2) \qquad (3)$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}\right) \qquad (4)$$

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \qquad (5)$$

여기서 $\dfrac{x_2 - x_1}{V} = t_2 - t_1$ 이므로

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{V^2}{c^2}(t_2 - t_1)\right]$$

$$= \gamma(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$= \gamma(t_2 - t_1)\frac{1}{\gamma^2}$$

$$= (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

이번에는 S'기준계에서 S 기준계의 (x_1, t_1)일 때 B 지점의 시계를 보면 A시계보다 $\frac{V(x_2-x_1)}{c^2}$만큼 빠르다. 따라서 S'계에서 B 지점의 시계의 진행을 보면 $t_2^{'}-t_1^{'}$ 동안 $t_2-\left(t_1+\frac{V(x_2-x_1)}{c^2}\right)$이 진행한 셈이다. 즉 S 계의 B 시계의 진행시간 간격 Δt는

$$\begin{aligned}
\Delta t &= t_2-\left(t_1+\frac{V(x_2-x_1)}{c^2}\right)\\
&= t_2-t_1-\frac{V^2}{c^2}(t_2-t_1)\\
&= (t_2-t_1)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\\
&= (t_2-t_1)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Delta t^{'}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

이 되어 A' 시계보다 느리게 간다.

로렌츠 속도 변환

식(1.21)에 $G \equiv \gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ 을 대입하면

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1-(u_x v/c^2)} \qquad (1.28)$$

[Tipler]

$$dx = \gamma(dx' + Vdt')$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \gamma(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})$$
$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + Vdt')}{\gamma[dt' + (V/c^2)dx']} = \frac{dx'/dt' + V}{1+(V/c^2)dx'/dt'}$$

즉

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + Vu_x'/c^2} \qquad (1.18)$$
$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'}{\gamma(1 + Vu_x'/c^2)} \qquad (1.19a)$$
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u_z'}{\gamma(1 + Vu_x'/c^2)} \qquad (1.19b)$$

고찰 V/c → 0 인 경우

$$u_x = u_x' + V, \quad u_y = u_y', \quad u_z = u_z' \quad \Rightarrow \quad \text{Galilei 변환}$$

예제 ★ x' 방향의 광펄스

$$u_x' = c, \quad u_y' = u_z' = 0$$
$$u_x = (c+V)/(1+cV/c^2) = c$$
$$u_y = u_z = 0 \quad : \text{Einstein의가정과부합}$$

예제 ★ y' 방향의 광펄스

$$u_x' = 0, \; u_y' = c, \; u_z' = 0$$
$$u_x = V, \; u_y = c/\gamma, \; u_z = 0$$

s계의빛의속력은

$$u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} = [V^2 + (c/\gamma)^2]^{1/2} = c$$
$$\tan\theta = u_x/u_y = \gamma V/c \quad : \text{광행차}$$

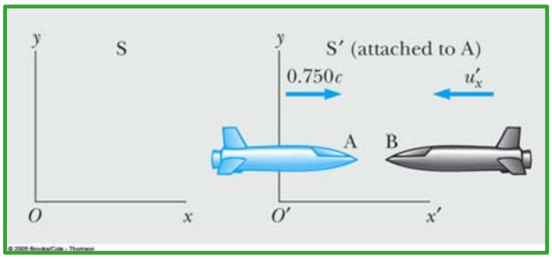
[Tipler End]

예제 1.8 우주선의 상대속도

반대방향으로 움직이고 있는 두 우주선,

$$u_x(A) = 0.75c,\ u_x(B) = -0.85c$$

A에 대한 B의 속도는?



(풀이)

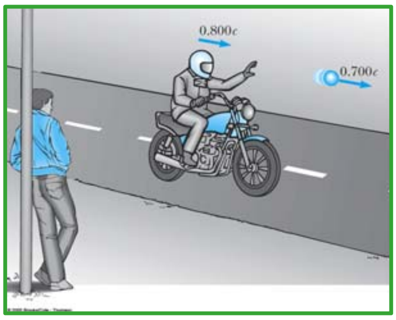
지구를 S'계, 우주선 A를 S계로 표시

$v = -0.75c,\ u_x'(B) = -0.85c$ 이므로

$$u_x(B) = \frac{u_x{}' + v}{1 + vu_x{}'/c^2} = \frac{-0.85c - 0.75c}{1 + (-0.85c)(-0.75c)/c^2} = -0.9771c$$

Galilei의 속도변환에서는 상대속도가 1.6c 일것이나, 광속을 넘지 않는다.

예제 1.9 질주하는 오토바이

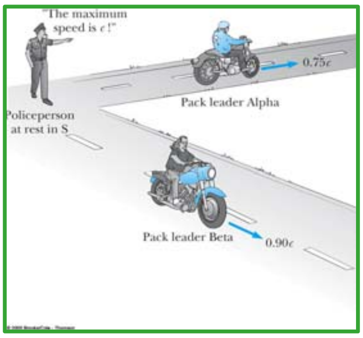


$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + (u_x' v/c^2)}$$
$$= \frac{0.700c + 0.800c}{1 + [(0.700c)(0.800c)/c^2]} = 0.9615c$$

예제 1.10 상대론적 두목

두목 알파가 보았을 때 두목 베타는 얼마나 빨리 멀어지는가?

두목 알파	$u_x = 0.75c$	$u_y = 0$
두목 베타	$u_x = 0$	$u_y = -0.90c$



S'계를 알파, S계를 지면으로 보면

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - (u_x v/c^2)} = \frac{0 - 0.75c}{1 - [(0)(0.75c)/c^2]} = -075c$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma[1 - (u_x v/c^2)]} = \frac{\sqrt{1 - [(0.75c)^2/c^2]}\,(-0.90c)}{1 - [(0)(0.75c)/c^2}$$
$$= -0.60c$$

베타가 알파로부터 멀어지는 속력은

$$u' = \sqrt{(u_x')^2 + (u_y')^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

연습문제 6 갈릴레이 변환을 사용하여 베타가 알파로부터 멀어지는 속력을 계산하라.

(답) 1.2c

Doppler 효과

고전론

$$f = \frac{f_0}{1 \pm V/c} \quad : \quad \text{파원이 운동하는 경우} \qquad (1)$$

$$f = \left(1 \pm \frac{V}{c}\right) f_0 : \quad \text{관측자가 운동하는 경우} \qquad (2)$$

여기서 V : 정지한 공기에 대한 속도

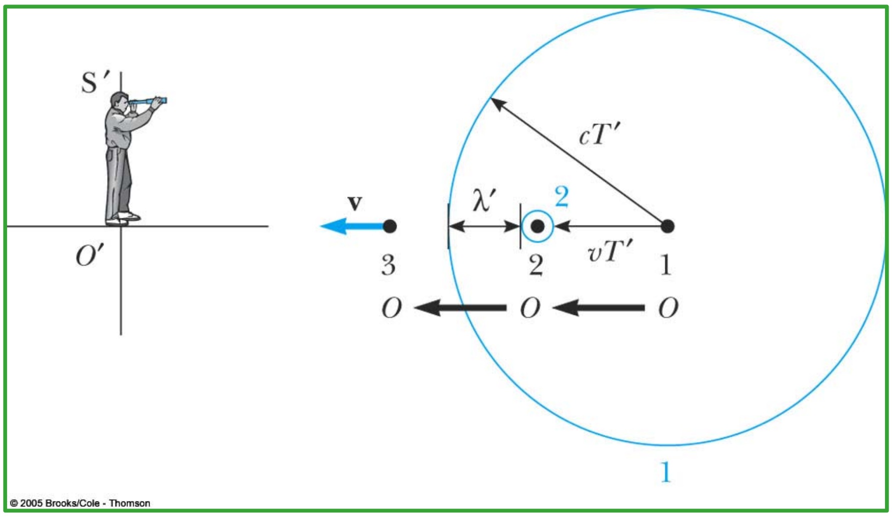
→ 광원이 운동하느냐 혹은 관측자가 운동하느냐에 따라 진동수가 달라진다.

→ 특수상대론의 제1가정에 모순

상대론적 Doppler 효과

S기준계에 고정된 광원을 S'기준계에서 관측한다.

S 기준계에서 진동수 f와 파장 λ를 갖는 광원이 속력 $.v$로 접근하는 경우



$$\lambda' = cT' - vT' \qquad (1.11)$$

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c-v)T'} \qquad (1.12)$$

S계의 고유시간 T는

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$f' = \frac{1}{1-(v/c)} \cdot \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{T} = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)} f$$

즉

$$f' = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)} f \qquad (1.13)$$

또는

$$f' = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}} f \qquad (1.14)$$

$$f_{obs} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}} f_{source} \qquad (1.15)$$

예제 1.6 히드라 은하의 후퇴 속력의 결정

이온화된 칼슘 원자에 의한 394nm의 흡수선이 Hydra 은하에서는 475nm로 이동한다. Hydra은하의 후퇴속력은 얼마인가?

$$f_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}} f_{\text{source}}$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}} \lambda_{\text{source}}$$

v/c에 대해서 풀면

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_{\text{obs}}^2 - \lambda_{\text{source}}^2}{\lambda_{\text{obs}}^2 + \lambda_{\text{source}}^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{(475\text{nm})^2 - (394\text{nm})^2}{(475\text{nm})^2 + (394\text{nm})^2} = 0.185$$

$$v = 0.185c = 5.54 \times 10^7 \text{m/s}$$

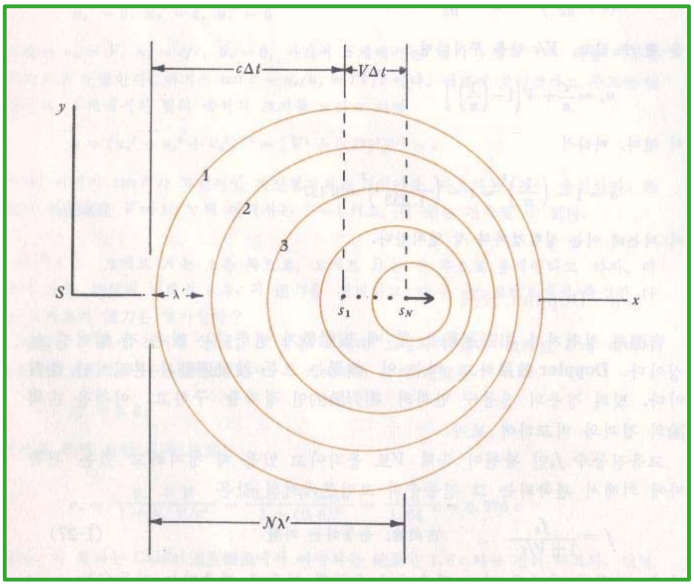
[Tipler]

1. S´계에 고정된 광원

Δt´동안 N 개의 파를 방출

$$N = f_0 \Delta t'$$

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$



Δt 시간동안 광원은 $V\Delta t$ 만큼 진행 ,광파의 진행거리는 $c\Delta t$

$$\lambda = \frac{(c \pm V)\Delta t}{N} = \frac{(c \pm V)\Delta t}{f_0 \Delta t'}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{f_0}{1 \pm V/c} \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{f_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 \pm V/c}$$

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1+(V/c)}}{\sqrt{1-(V/c)}}$$: 가까워 질 때

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1-(V/c)}}{\sqrt{1+(V/c)}} \quad : \text{멀어질 때}$$

2. 광원이 정지계에 있고 관측자가 운동하는 경우

상대론적 결과는 (3)식과 동일하다.

광원이 있는 S 기준계에서, 운동하는 관측자가 광파면의 개수를 측정하는 상황을 분석.

광원과 정지상태에 있으므로 파장의 변화는 없다. 다만 관측자에 대한 광의 상대속도가 변한다. 관측자가 광원을 향해 운동하면 광의 상대속도가 변하여 c+V 이다.

Δt동안 해아린 광파면의 개수는

$$N = \frac{(c+V)\Delta t}{\lambda} = \frac{(c+V)\Delta t}{c/f_0} = f_0(1+V/c)\Delta t$$

Δt에 대한 고유시간은 $\Delta t'$ 이므로

$$f = \frac{N}{\Delta t'} = f_0(1+V/c)\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{f_0(1+V/c)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\frac{f_0(1+V/c)}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{f_0(1+V/c)\sqrt{1-V^2/c^2}}{(1+V/c)(1-V/c)} = \frac{f_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V/c}$$

즉

$$f = \frac{f_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V/c}$$

이 되어 (3)식과 동일하다. 광원이 운동하느냐 혹은 관측자가 운동하느냐에 따라 차이가 없다. ★특수상대론의 제1가정에 부합★

3. 상대운동이 광원과 관측자를 잇는 직선에 수직이면

$$f = \sqrt{1-V^2/c^2}\, f_0$$

4. 광원과 관측자를 잇는 직선에 대해 θ로 관측자가 운동하는 경우

$$f = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 \pm (\frac{V}{c})\cos\theta} f_0$$

[Tipler End]

상대론적 적색편의

허블의 우주 팽창이론 : 멀리 떨어진 별일 수록 지구로부터 후퇴속도가 더 크다 ← 상대론적 적색편의

쌍둥이의 역설

$L_0 = 8$ 광년, $v = 0.8c$의 속도로 왕복한다.

Homer는 지구에 남고 Tom은 행성으로 왕복 우주여행을 한다.

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{3}{5}$$

$$f == \frac{f_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 \pm v/c}$$

$f = 3f_0$; 가까워 질 때,

$f = \frac{1}{3} f_0$; 멀어질 때

[Homer의 입장]

$t = \frac{2L_0}{v} = 20\mathrm{Y}$; 자신이 먹은 나이

$t' = t \cdot \frac{3}{5} = 12\mathrm{Y}$: Tom이 먹은 나이

[Tom의 입장]

$$L = L_0 \cdot \frac{3}{5} = 4.8\text{광년}$$

$t' = \frac{2L}{v} = \frac{2 \times 4.8\mathrm{cY}}{0.8\mathrm{c}} = 12\mathrm{Y}$; 자신이 먹은 나이

$t'' = t' \cdot \frac{3}{5} = 7.2\mathrm{Y}$; Homer가 먹은 나이

Tom이 먹은 나이에 대해서는 둘의 의견이 일치하나, Homer의 먹은 나이에 대해서는 두 사람의 의견이 일치하지 않는다.

동시화에 의한 설명

Tom이 행성을 향해 0.8c의 속력을 얻고 보니 행성의 시계는 지구의 시계보다 빨리 간다.

$$t_P - t_E = \frac{L_0 v}{c^2} = \frac{(8c\,Y)(0.8c)}{c^2} = 6.4\,Y$$

Tom이 행성에 도달하기 직전 행성의 시계는 10년을 가리키나 지구의 시계보다 6.4년 빠른 것을 감안하면 지구(Homer)에서는 3.6년이 흐른 셈.

$2 \times 3.6\mathrm{Y} = 7.2\mathrm{Y}$; Tom이 예측한 Homer의 고유시간

그러나 행성에 도착하기 위하여 감속하여, 행성에 도착하니 행성의 시계는 지구의 시계와 동시가 되어 있음을 인정하지 않을 수 없다. 결국 Tom이 행성에 도착하니, 자신은 6년이 흘렀고 Homer는 10년이 흐른 것을 인정한다. 돌아 올 때도 같은 맥락

따라서 Tom이 Homer의 먹은 나이를 20년임을 인정하여 두 사람의 의견이 일치한다.

Doppler 효과에 의한 설명

Homer와 Tom이 서로 자신이 1년이 지날 때 마다 1개의 펄스를 보내어 1년이 흘렀음을 상대방에게 알린다.

[Tom이 측정한 Homer가 보낸 펄스의 개수]

행성으로 가는 6년 동안 1년에 1/3개의 펄스를 받는다.

$\frac{1}{3}(\text{개}/\text{년}) \cdot 6\text{년} = 2\text{개}$; 행성으로 갈 때 받는 펄스

행성에서 지구로 오는 동안 1년에 3개의 펄스를 받는다.

$3(\text{개}/\text{년}) \cdot 6\text{년} = 18\text{개}$; 지구로 돌아 오면서 받는 펄스

지구로 돌아올 때까지 20개의 펄스를 받는다.

Tom은 Homer가 20살을 먹은 것을 인정한다.

[Homer가 측정한 Tom이 보낸 펄스의 개수]

Tom이 행성에 도착할 때까지 10년간, 또 행성에 도착하여 보낸 펄스가 지구에 도착할 때까지 8년간, 총 18년간 1년에 1/3개의 펄스를 받는다

$\frac{1}{3}(\text{개}/\text{년}) \cdot 18\text{년} = 6\text{개}$;

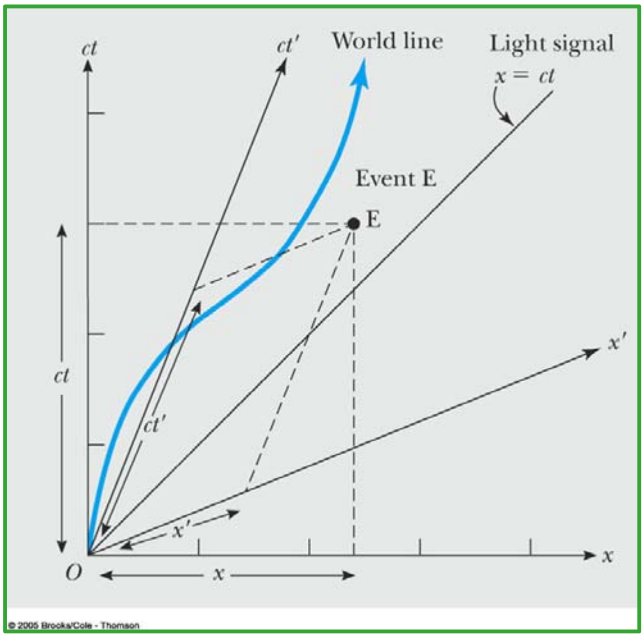
나머지 2년간 1년에 3개의 펄스를 받는다.

$3(\text{개}/\text{년}) \cdot 2\text{년} = 6\text{개}$

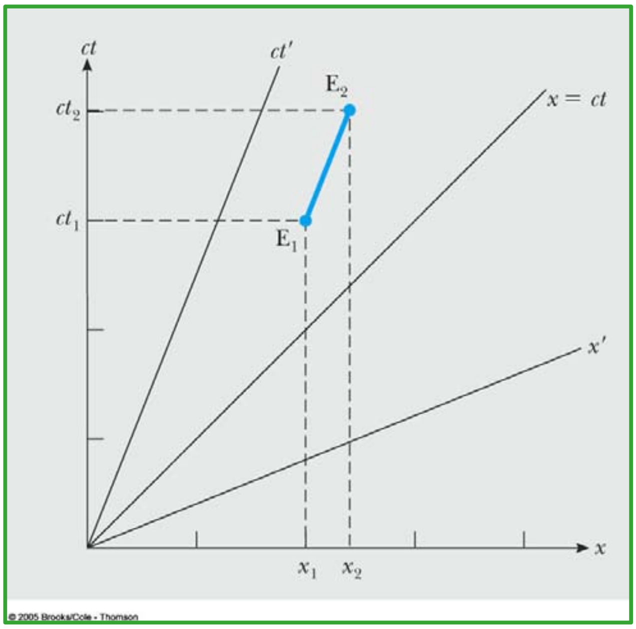
지구로 돌아올 때까지 12개의 펄스를 받는다. Homer는 Tom이 12살을 먹은 것으로 인정

1.7 시공간과 인과율

민코프스키(Hermann Minkowski)의 시공간도표



사건 $E_1(x_1, t_1)$ and $E_2(x_2, t_2)$



입자의 속도

$$u_x = c\frac{\Delta x}{\Delta ct} = \frac{c}{\text{기울기}} \qquad (1.31)$$

시공간 간격 Δs

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2 \qquad (1.32)$$

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c(t_2' - t_1'))^2 - (x_2' - x_1')^2$$

E_1 과 E_2에 대해

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1),\ t_1' = \gamma(t_1 - vx_1/c^2)$$

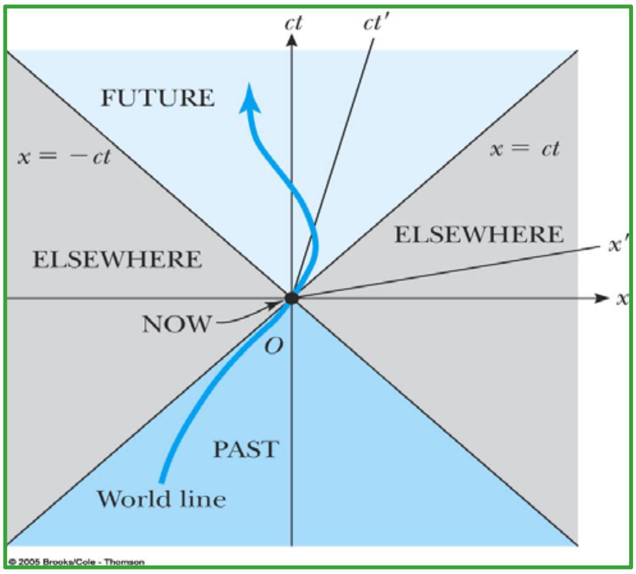
을 계산하면

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta s)^2 \qquad (1.33)$$

불변인 시공간 간격 Δs

두 사건 사이의 시공간 간격 Δs은 불변이고 모든 관성 관찰자들에게 같은 값을 가진다.

$x = x' = 0$ 과 $t = t' = 0$에서 공통된 원점을 가지는 두 다른 관성틀 S와 ,S'



과거, 현재, 미래

'그 외의 곳'(elsewhere) ; 원점 O를 지나는 세계선을 가진 물체가 도달할 수 없는 곳

→기울기<1 혹은 물체의 속력이 c보다 빨라야 하기 때문

한 사건이 다른 사건에 의해 일어날 수 있는지 여부

V와 W

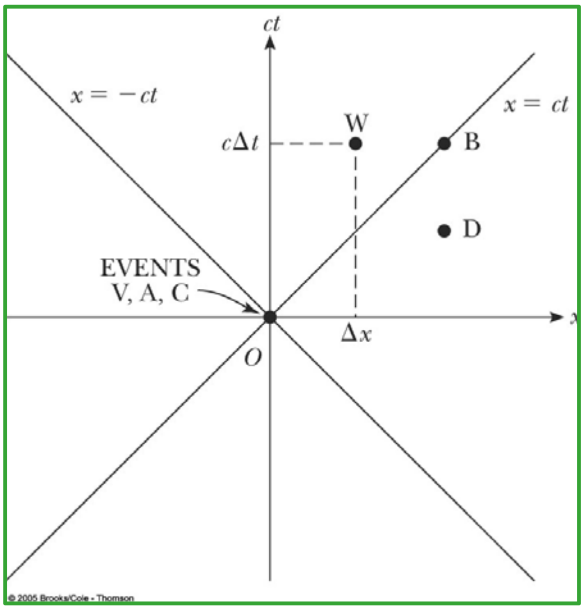
1) $c\Delta t > |\Delta x|$ 이므로 $(\Delta s)^2 > 0$
2) V에서 W까지의 거리를 c보다 작은 속력으로 두 사건을 연결 지을 수 있다.
3) 시간꼴(time shape)
4) 다른 모든 기준틀에서도 시간꼴 ← $(\Delta s)^2 =$ 불변

A와 B

1) $c\Delta t = |\Delta x|$ 이므로 $(\Delta s)^2 = 0$
2) 빛 펄스의 세계선에 의해 연결
3) 빛 꼴(light shape)

C와 D

1) $c\Delta t < |\Delta x|$ 이므로 $(\Delta s)^2 < 0$
2) 빛의 속력으로도 미치지 못한다.
3) 어떤 관성틀에서도 두 사건은 인과가 성립하지 않는다.


ct
x = −ct
x = ct
W
B
D
cΔt
EVENTS
V, A, C
Δx
O
x
© 2005 Brooks/Cole - Thomson