

5장 물질파

- 드브로이의 물질파 ; 입자의 파동성
- 국소파(localized wave)와 파군(wave group)
- 하이젠베르크의 불확정성 원리

5.1 드브로이의 시험적 파동

Bohr 원자모형의 부족한 점

- 관측된 스펙트럼의 세기를 예측하지 못한다.
- 많은 전자를 가진 원자의 광 방출과 흡수파장을 예측하지 못한다.
- 원자계의 시간의존 운동방정식을 제시하지 못한다.
- 빛의 파동-입자의 이중성을 망라한 개념을 제공하지 못한다.
- 양자화 되는 계의 일반화된 이론을 제공하지 못한다.

de Broglie의 물질파(1923)

양자계의 일반화 이론의 출발

- 모든 형태의 물질은 입자성뿐만 아니라 파동성도 갖고 있을 것이다.
- 물질파의 파장과 진동수는 운동하는 물체의 물리량(운동량과 에너지)과 연관되어 있을 것이다.

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.1)$$

$$f = \frac{E}{h} \quad (5.2)$$

p 와 E 는 상대론적 운동량과 상대론적 전체 에너지

$$p = \gamma mv \quad (5.3)$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.4)$$

그런데 위상속도는

$$v_p = f\lambda = \frac{\gamma mc^2}{h} \cdot \frac{h}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v} > c \quad \text{: 위상속도}$$

이것은 입자의 속도가 아니다.

Bohr 모형의 양자화에 대한 de Broglie의 설명

원자 내 전자에너지의 양자화에 대한 설명 기대

1. 입자적 관점 ; 다양한 위치와 속도가 어떻게 양자화를 설명할 수 있겠는가?
2. 파동적 관점 ; 파동의 간섭, 정상파 조건 - 특정 파장, 진동수만을 허용

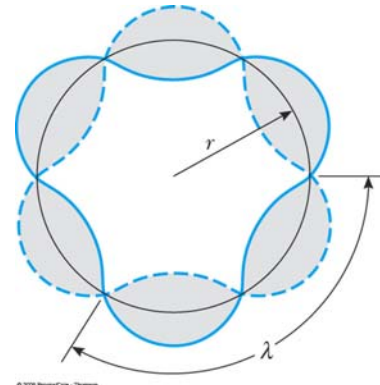
각운동량의 양자화

$$L = m_e v r = n\hbar$$

$$p r = n \frac{h}{2\pi}$$

$$2\pi r = n \frac{h}{p} = n\lambda$$

파장의 정수배가 원 궤도의 둘레와 정확히 같으면 전자의 물질파가 보강간섭을 일으키기 때문에 안정한 궤도 즉 허용되는 Bohr 궤도가 된다.



[예제 5.1] 야구공의 파동성은 왜 보이지 않는가?

$v = 60 \text{ mi/h (27 m/s)}$, $m = 140 \text{g}$ 의 야구공의 파장은

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{(0.14 \text{kg})(27 \text{m/s})} = 1.7 \times 10^{-34} \text{m}$$

이 파장을 회절시키기에는 핵(10^{-15}m)도 너무 크다!

[예제 5.2] 어느 정도 크기의 입자가 회절 현상을 보이는가?

(q, m)인 전하가 V 로 가속되었다.

(a) 입자의 비상대론적인 파장을 구하라.

$$\frac{p^2}{2m} = qV \quad \text{or} \quad p = \sqrt{2mqV}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

(b) 50V로 가속되는 전자의 드브로이 파장은?

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e q V}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{C})(50 \text{V})}} = 1.7 \times 10^{-10} \text{m} = 1.7 \text{ \AA} \end{aligned}$$

원자의 크기, 고체내의 원자 사이의 거리 정도의 파장

저 에너지의 전자선 ; 표면의 원자 위치를 결정하기 위한 전자 회절 실험에 사용

[연습문제 1]

(a) 정지 상태에서 전위차가 큰 V 를 통해 가속되는 전자의 드브로이 파장이 다음과 같음을 보여라.

$$\lambda = \frac{12.27}{V^{1/2}} \left(\frac{Ve}{2m_e c^2} + 1 \right)^{-1/2} \quad (5.7)$$

$$(\text{힌트}) \quad E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad \text{and} \quad E = E_0 + Ve$$

(b) 10MeV의 전자에 대한 정확한 상대론적 표현 대신에, $\lambda = 12.27/V^{1/2}$ 사용할 때 발생하는 퍼센트 오차를 계산하라.

(답) 230%

5.2 데이비슨-거머 실험

전자의 파동성에 대한 최초의 실험적 증거

1927년 벨연구소, Clinton J. Davisson과 Lester H. Germer

니켈 표적으로부터 산란되는 느린 전자의 실험

George P. Thomson(J. J. Thomson의 아들)

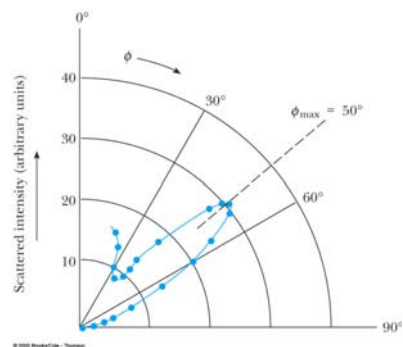
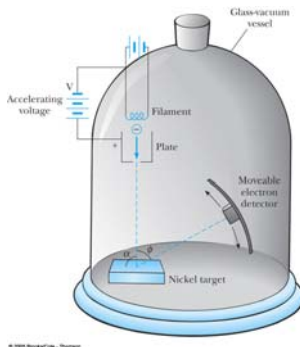


그림 5.4 데이비슨-거머 실험 장치의 대략적인 모습

그림 5.5 데이비슨과 거머의 독창적인 연구에 근거한 54eV 전자의 경우, 산란 세기 대 산란 각의 극좌표 그림. 이 그림에서 산란 세기는 원점에서 그 지점까지의 거리에 비례한다.

- ▶ 산화된 Ni 표적을 수소를 흘려주면서 환원시킨 표적에 의한 실험의 예상치 못한 결과
 - 오랜 열처리에 의해 생성된 커다란 단결정 영역에 의한 탄성산란에 의한 결과
 - 1927년, 리처드슨, 보른, 프랑크의 분석결과 $\lambda = \frac{h}{p}$ 로 주어지는 파장을 가진 전자가 회절을 일으킨 결과로 결론.

$\alpha = 90.0^\circ$, $V = 54.0\text{V}$, $\phi = 50.0^\circ$ 로 산란되는 전자

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV \text{ 즉 } v = \sqrt{2Ve/m_e}$$

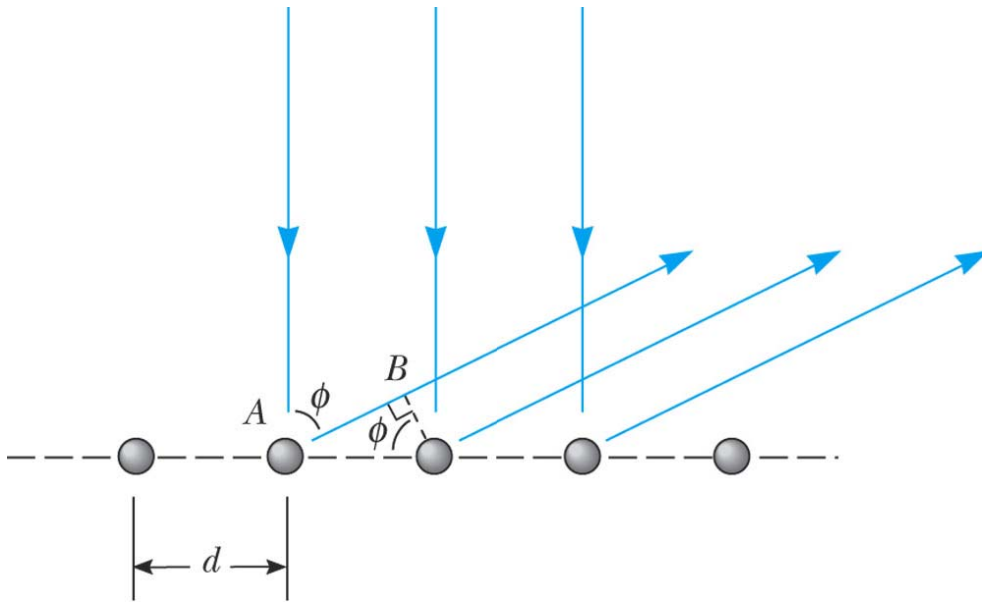
$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Vem_e}} \quad (5.8)$$

$Ve = 54.0\text{eV}$ 인 전자의 파장은

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(54.0\text{V})(1.60 \times 10^{-19}\text{C})(9.11 \times 10^{-31}\text{kg})}}$$

$$= 1.67 \times 10^{-10}\text{m} = 1.67 \text{ \AA}$$

Ni표적을 회절격자로 고려한 회절조건



$$AB = d \sin \phi = n\lambda$$

© 2005 Brooks/Cole - Thomson

그림 5.6 하나의 원자층에서 각도 ϕ 로 산란된 전자 물질파에 대한 보강 간섭

원자의 표면층만을 고려한다.

$$d \sin \phi = n\lambda$$

$$d = 2.15 \text{ \AA} \text{ (x-선 회절측정)}$$

$$\lambda = (2.15 \text{ \AA})(\sin 50.0^\circ) = 1.65 \text{ \AA}$$

☀ 전자의 de Broglie 파장과 잘 일치.

He 원자에서의 회절 ; 이스터만과 슈테른(독일)

수소원자에서의 회절 ; 존슨(미국)

중성자 빔의 회절 ; 1932년

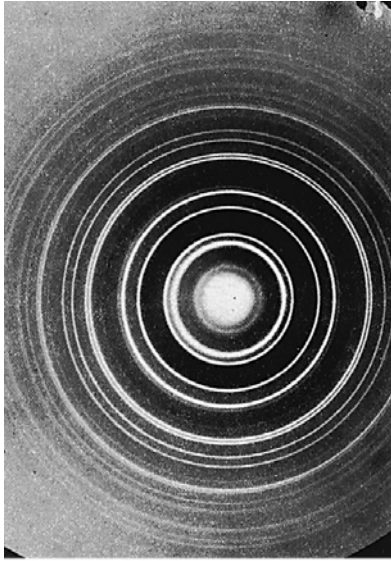


그림 5.7 Cu_3Au 박막에서 50kV 전자의 회절 이 합금의 두께는 400 \AA 이었다.

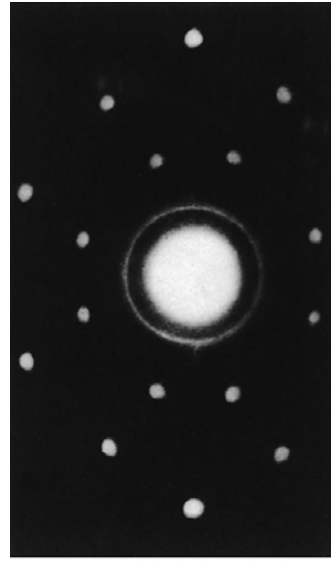


그림 5.8 NaCl의 단결정에 의해 생긴 중성자의 회절무늬

[예제 5.3] 열 중성자

중성자가 결정에서 회절될 수 있는 운동에너지(eV 단위)
 $\lambda = 1 \text{ \AA}$; 원자사이의 거리이면 회절이 일어난다.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.00 \times 10^{-10} \text{ m}} = 6.63 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

운동에너지는

$$K = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(6.63 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 1.32 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.0825 \text{ eV}$$

실온에서의 중성자의 평균 운동에너지는

$$K = \frac{3}{2} k_B T = (1.50)(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 0.0388 \text{ eV}$$

열중성자나 실온에서 열적 평형에 있는 중성자는 단결정에서 약간 회절할 수 있다.
 핵 반응로에서 얻어지는 큰 에너지의 중성자를 흑연으로 감속시켜 열중성자를 얻는다.

[연습문제 2] 단파장 중성자

역학적 속도 선택기

(a) 파장이 $\lambda = 1.00 \text{ \AA}$ 인 중성자의 속력을 계산하라.

(b) $\lambda = 1.00 \text{ \AA}$ 인 중성자를 통과시키기 위해 필요한 축의 회전 진동수(rpm)은 얼마인가? 디스크 B의 홈은 디스크 A의 홈보다 10° 만큼 차이를 두고 움직인다.

(답) (a) $3.99 \times 10^3 \text{ m/s}$ (b) $13,300 \text{ rev/min}$

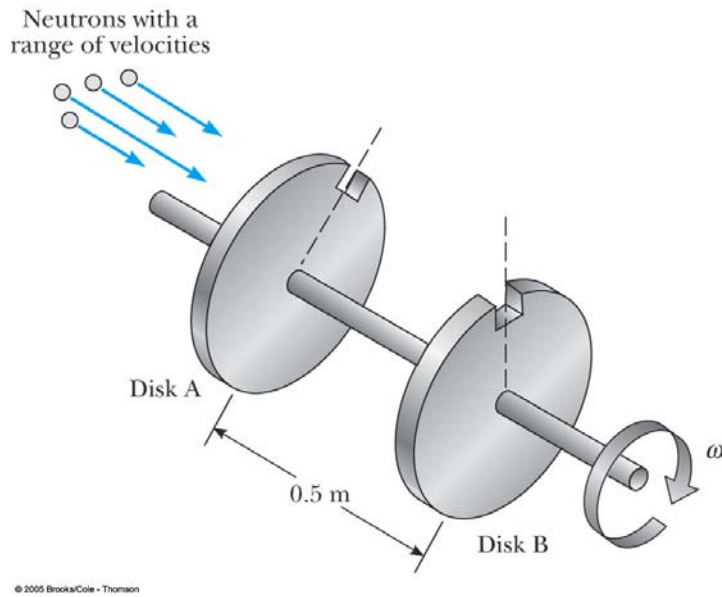


그림 5.9 중성자 속도 선택기. 디스크 B의 홈은 디스크 A의 홈보다 10°만큼 차이를 두고 움직인다.

전자현미경

높은 배율 ; 가시광선보다 훨씬 짧은 전자의 파장

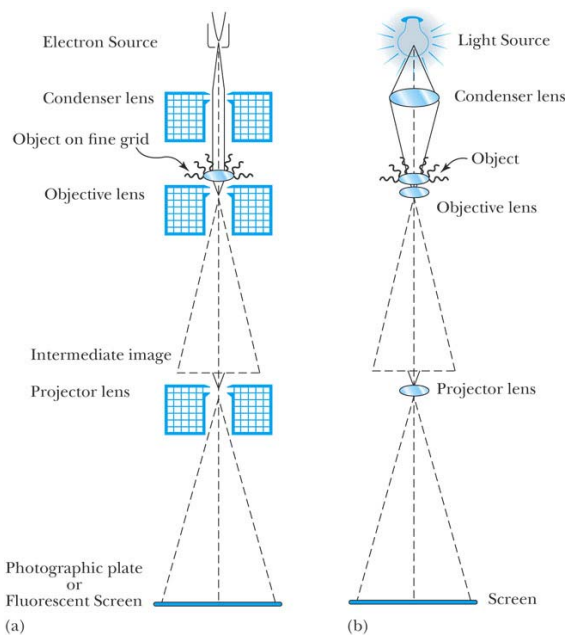
TEM(Transmission Electron Microscope, 투과 전자현미경) ; 1931 Max Knoll, Ernst Ruska, 1,000,000배의 배율, 0.2nm의 분해능

SEM(Scanning Electron Microscope, 주사 전자현미경) ; M. Von Ardenne(1937), RCA Camden과 Vladimir Zworykin(1940), 10nm의 분해능, 고 배율의 3-차원 영상.



© 2005 Brooks/Cole - Thomson

그림 5.10 루스카의 1934년 전자현미경



© 2005 Brooks/Cole - Thomson

그림 5.11 (a) 자기 렌즈가 있는 투과 전자 현미경의 대략적인 모습

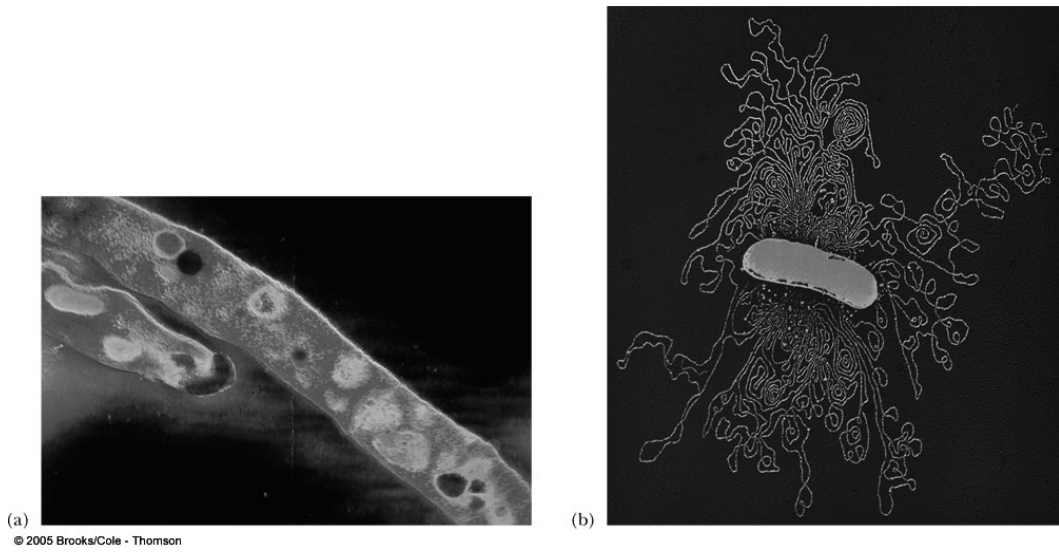


그림 5.12 (a) 결핵 세균의 적외선(false-color) TEM 현미경 사진. (b) 미생물 DNA의 TEM 현미경 사진(X40,000)

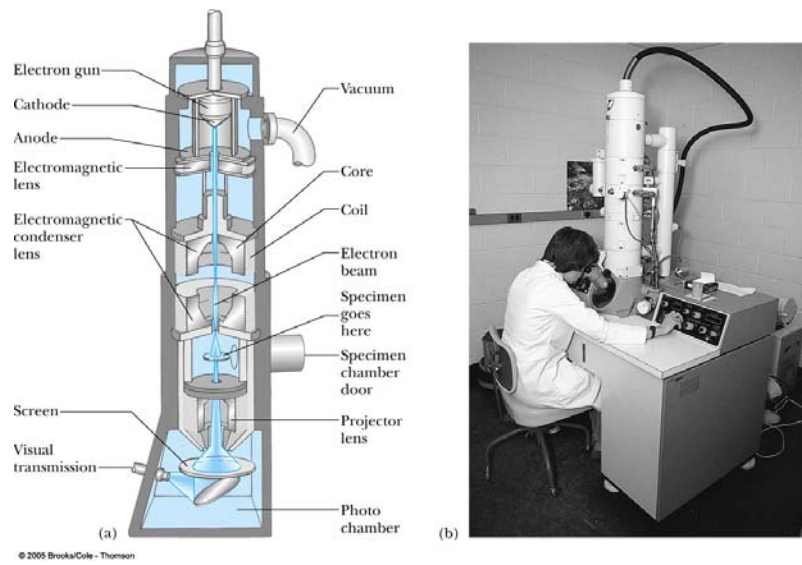


그림 5.13 (a) 투과 전자 현미경의 개략도 (b) 같은 TEM의 사진

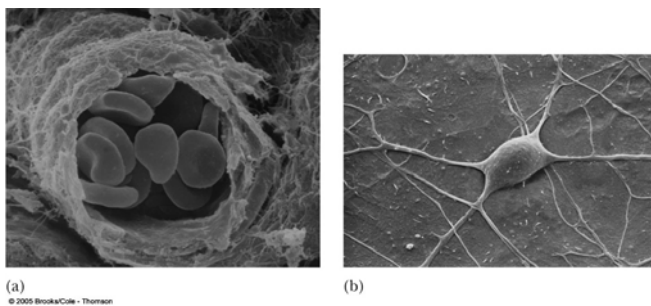


그림 5.14 (a) 미세한 동맥 내의 혈구를 보여주는 SEM 현미경 사진. (b) 하나의 뉴런을 보여주는 SEM 현미경 사진(X4000)

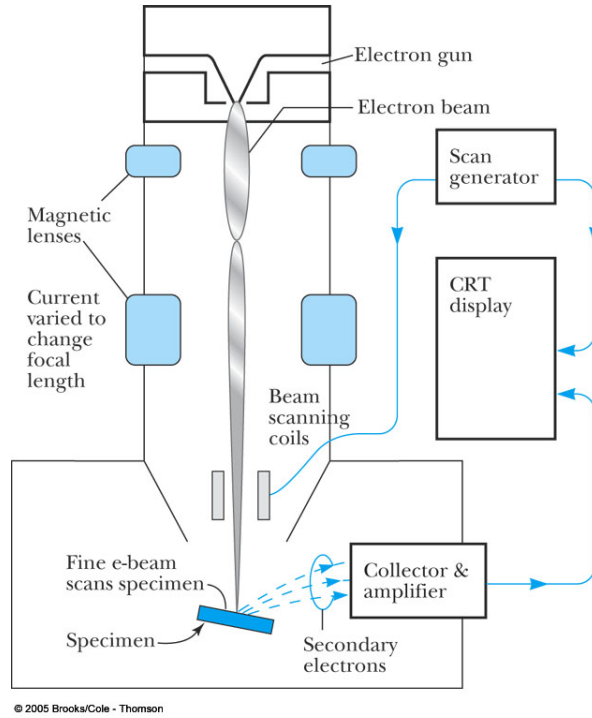


그림 5.15 주사 전자 현미경의 작동 부분

5.3 파군과 분산

■ 운동하는 입자를 나타내는 물질파

입자의 局在性(localization) ; pulse, wave group(파군), wave packet(파속, 파동묶음)

입자의 속도 ; group velocity(군속도, 파군의 속도)

파군의 수학적 표현 ; 작은 공간 영역에서 보강간섭을 일으키는 서로 다른 파장과 진폭, 그리고 위상을 갖는 파들의 중첩으로 구성. Fourier series.

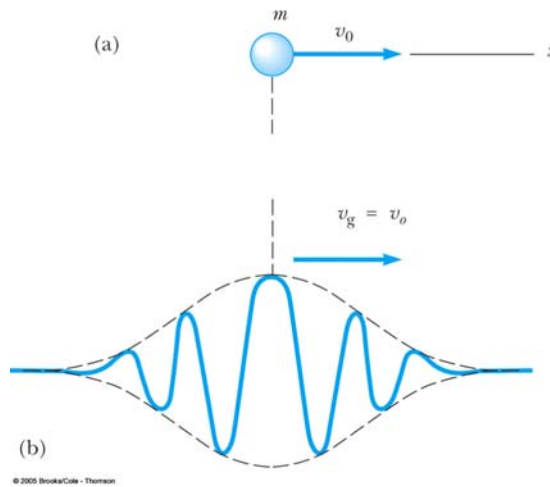


그림 5.17 물질파를 지닌 입자의 표현

■ 맥놀이 파동

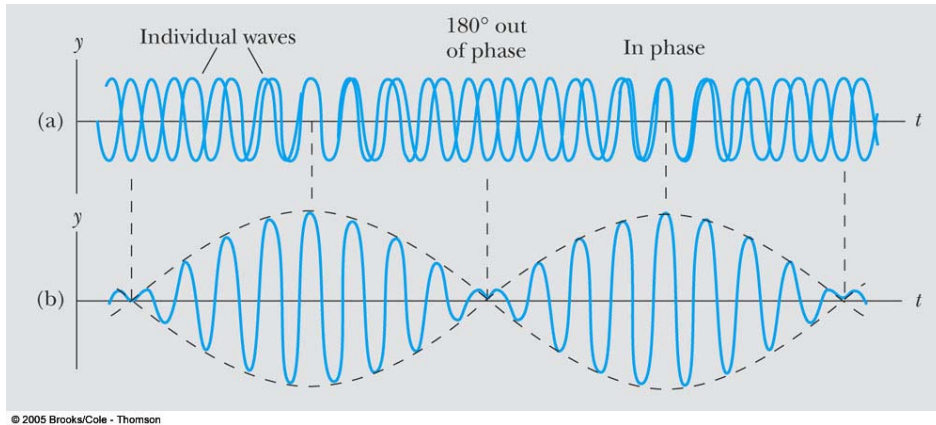


그림 5.18 같은 방향으로 진행하는 약간 다른 진동수를 갖는 두 파동의 조합으로 형성된 맥놀이. (a) 개별 파형들, (b) 결합된 파는 시간에 맞추어 진동하는 진폭(점선)을 갖는다.

일차원 파동(plane wave, 평면파)

$$y = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi ft\right) \quad (5.10)$$

$$v_p = \lambda f \quad (5.11)$$

$$\omega = 2\pi f, \quad k = 2\pi/\lambda$$

$$y = A \cos(kx - \omega t) \quad (5.12)$$

일차원 파동은 입자의 국재화를 표현하지 못한다.

■ 위상속도

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (5.13)$$

■ 맥놀이

진폭은 같지만 파장과 진동수, 위상속도가 약간 다른 양(+)의 x 방향으로 진행하는 두 파동의 중첩

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

다음과 같은 삼각함수의 공식을 사용한다.

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$a = \alpha + \beta \quad \text{and} \quad b = \alpha - \beta \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{a+b}{2} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{a-b}{2}$$

$$y = 2A \cos \frac{1}{2} \{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\} \cdot \cos \frac{1}{2} \{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\} \quad (5.14)$$

k 와 ω 가 약간 다른 두 파동의 중첩을 고려하면

$$\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_2 - k_1}{2}, \quad \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} ; \quad \text{장파장, 낮은 진동수로 진행되는 포락선}$$

$$2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

이, $\frac{1}{2}(k_1 + k_2), \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$; 단파장, 높은 진동수로 진행되는 파동

$$\cos \left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right]$$

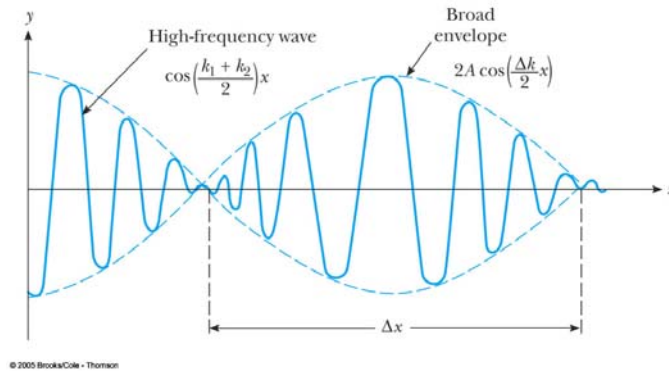


그림 5.19 약간 다른 파장을 갖는 두 파동의 중첩에 의한 기초적인 파군의 형성.

맥놀이 파는 입자의 국재화를 완전히 기술하지는 못할지라도 펄스 모형과 공통적인 여러 가지 모습들을 가진다.

포락선 내에 있는 파동의 위상속도

$$v_p = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{(k_1 + k_2)/2} \approx \frac{\omega_1}{k_1} = v_1$$

위상속도 v_1 or v_2 로 ($v_1 \approx v_2$)이동

포락선의 이동속도 ; 군속도(group velocity)

$$v_p = \frac{(\omega_1 - \omega_2)/2}{(k_1 - k_2)/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (5.15)$$

펄스의 공간 폭 Δx 가 작으면 작을수록, 펄스를 형성하는데 필요한 파장 또는 파수 Δk 의 범위가 더 커진다.

$$\Delta x \Delta k \approx 1 \quad (5.16)$$

$$\Delta t \Delta \omega \approx 1 \quad (5.17)$$

‘반응 시간 대 띠풍 공식’ ; 시간의 폭이 Δt 인 전압 펄스를 왜곡 없이 증폭시키기 위해서, 펄스 증폭기는 진동수 띠풍 $\Delta \omega$ 내에 있는 모든 진동수를 똑 같이 증폭시켜야만 한다.

Δx : 군의 공간에서의 범위, 인접한 극소 사이의 거리로 가정하면

$$\Delta k \Delta x = 2\pi \quad (5.18)$$

$$\Delta \omega \Delta t = 2\pi \quad (5.19)$$

펄스(pulse) : 제한된 범위에서만 존재하고 그 밖의 영역에서는 영인 펄스(파속)는 연속적인 파동 분포를 갖는 많은 파동을 합해야만 한다. 이 때 펄스(파군)의 속도는

■ 군속도

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (5.20)$$

☀ k_0 ; 존재하는 많은 파동의 중심 파수

군속도와 구성 파동의 위상 속도 사이의 관계

$$\omega = kv_p \rightarrow d\omega = dk v_p + k dv_p \text{로부터}$$

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = v_p \left|_{k_0} + k \left. \frac{dv_p}{dk} \right|_{k_0} \quad (5.21)$$

분산매질(dispersion medium) ; 위상속도가 파장에 따라 변하는 물질. 유리등

비분산 매질 ; 위상속도가 파장에 따라 변하지 않는 매질. 진공.

비분산 매질에서 군속도와 위상속도는 같다.

[예제 5.4] 분산 매질에서의 군속도

특별한 물질에서 파동의 위상 속도는 파장이 반으로 줄 때 두 배가 된다. 이 계에서 파군이 중심위상 속도의 두 배로 움직임을 보여라.

(풀이)

$$v_p = \frac{A'}{\lambda} = Ak$$

$$v_g = v_p \Big|_{k_0} + k \frac{dv_p}{dk} \Big|_{k_0} = Ak_0 + Ak_0 = 2Ak_0 = 2v_p \Big|_{k_0}$$

[예제 5.5] 깊은 곳에서 수면파의 군속도

깊은 곳에서 수면파의 위상속도

$$v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

(풀이)

$k = 2\pi/\lambda$ 이므로

$$v_p = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} = v_p \Big|_{k_0} + k \frac{dv_p}{dk} \Big|_{k_0} = \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} \equiv \frac{1}{2} v_p \Big|_{k_0}$$

물질파 묶음(wave packet)

de Broglie의 물질파

$$f = \frac{E}{h} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$v_p = f\lambda = \frac{E}{p} \tag{5.22}$$

$$E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$$

$$v_p = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} \tag{5.23}$$

■ **물질파의 위상속도**

$$v_p = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} \tag{5.24}$$

- 위상속도는 광속보다 크거나 적어도 같다.
- 시간이 지남에 따라 파속은 분산되어 Δx 는 커진다.

■ **물질파의 군속도**

$$v_g = \left[v_p + k \frac{dv_p}{dk} \right]_{k_0}$$

$$v_g = \frac{c}{\left[1 + \left(\frac{mc}{\hbar k_0}\right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{c^2}{v_p \Big|_{k_0}} \tag{5.25}$$

(5.22)식으로부터 위상속력은 $v_p = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$, 이를 (5.25)에 대입하여

$v_g = v$
즉 군속도는 입자의 속도와 일치한다.

5.4 하이젠베르크의 불확정성 원리

Werner Heisenberg ; 행렬로 표현하는 양자역학,

☀ 하이젠베르크의 불확정성 원리

- 입자의 위치와 운동량을 제한 없이 정확히 동시에 결정하는 것은 불가능하다.
- 위치 측정의 불확정도가 Δx 이고 x 방향에서 측정한 운동량의 불확정도가 Δp_x 라면, 이들 두 불확정도의 곱은 결코 $\hbar/2$ 보다 작을 수 없다.

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.26)$$

- 측정기구의 불완전한 데 기인하는 것이 아니다.
- Δx 내의 파속을 표현하기 위해 넓은 범위의 파수 Δk 를 사용해야하는 필요성을 표현한 것.
- $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 이 매우 작은 값이기 때문에 거시 세계에서 불확정성 원리와 고전적인 법칙사이에 모순은 없다.

Δx 와 Δk 를 표준 편차로 정의할 때

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}$$

일반적 $f(x)$ 의 경우

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (5.27)$$

$\Delta p_x = \hbar \Delta k$ 를 이용하면

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.28)$$

정확한 운동량($p = \hbar k_0, \Delta p = 0$) → 위치의 불확정도 $\Delta x = \infty$

$$e^{ik_0x} :$$

■ 에너지-시간 불확정성 원리

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.29)$$

- 에너지의 정확도는 그 에너지를 측정하는 시간에 의해 제한된다.
- 에너지의 불확정도는 아원자 입자의 수명과 관련된다.

불확정성 원리의 또 다른 관점

☞ 불확정성 원리는 파속을 형성하기 위한 이론(수학)일 뿐 실제(실험)에서도 그러할까?

■ 현미경으로 전자를 보는 사고 실험

운동량의 불확정도는

$$\Delta p_x = (2h \sin \theta) / \lambda$$

위치의 불확정도 ← 물리광학

$$\Delta x = \lambda / (2 \sin \theta)$$

$$\Delta p_x \Delta x \approx \left(\frac{2h}{\lambda} \sin \theta \right) \left(\frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right) = h$$

※ θ 또는 렌즈 크기를 증가시켜 Δx 가 감소하면, 전자 운동량의 불확정도가 증가한다.

※ 불확정성 원리를 위배하는 정도로 입자의 위치와 운동량을 동시에 측정하는 것이 불가능하다.

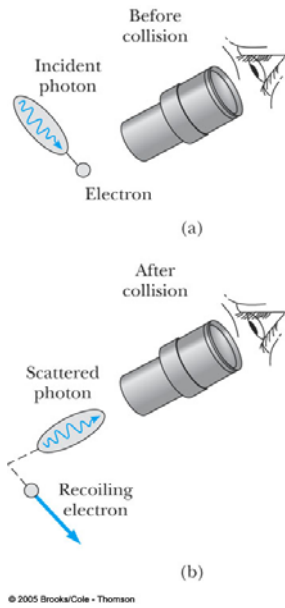


그림 5.21 좋은 현미경으로 전자를 보는 사고 실험

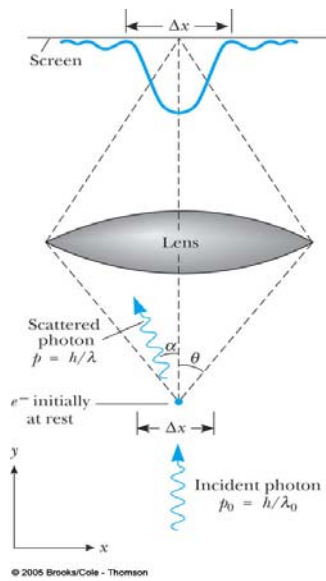


그림 5.22 하이젠베르크의 현미경

[예제 5.6] 거시적인 물체의 경우 불확정성 원리는 변화가 전혀 없다.

(a) 한 변이 15m인 방에서 100g의 라켓볼이 2.0m/s로 운동하고 있다. 속도의 불확정도를 계산하라.

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{2 \times 15 \text{m}} = 3.5 \times 10^{-36} \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{3.5 \times 10^{-36} \text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.100 \text{kg}} = 3.5 \times 10^{-35} \text{m/s}$$

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{3.5 \times 10^{-35}}{2.0} = 1.8 \times 10^{-35}$$

속도의 불확정도는 관측되지 않는다.

(b) 공이 y-축을 따라 갑자기 운동한다면, 1s 동안에 얼마나 멀리 이동하겠는가? 공은 최고의 불확정도로 운동한다고 가정하여라.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

위치의 불확정도가 모두 같기 때문에

$$\Delta v_y = 3.5 \times 10^{-35} \text{m/s}$$

[연습문제 3] 공이 y 방향으로 50 cm 이동하는 데 얼마나 걸리겠는가?

[예제 5.7] 전자가 핵 내에 존재하는가?

핵의 크기를 $1 \times 10^{-14} \text{m}$ 로 가정하면

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{eV} \cdot \text{s}}{1.0 \times 10^{-14} \text{m}} \times \frac{3.00 \times 10^8 \text{m/s}}{c}$$

$$= 2.0 \times 10^7 \text{eV}/c$$

핵 내에 잡혀있는 전자의 운동량을 20MeV로 가정하여 전자의 운동에너지를 계산하면

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2$$

$$= (20 \text{MeV}/c)^2 c^2 + (0.511 \text{MeV})^2 = 400 (\text{MeV})^2$$

혹은

$$E \geq 20 \text{ MeV}$$

전자의 운동에너지는

$$K = E - m_e c^2 \geq 19.5 \text{ MeV}$$

핵의 β -붕괴에서 방출된 전자의 에너지는 약 1MeV이므로, 베타 붕괴에서 관측된 전자는 핵 내에서 오는 것이 아니라 붕괴 순간에 생긴 것이다.

[예제 5.8] 스펙트럼선의 폭

원자 집단이 들뜬 후 복사하는 평균 시간을 특정한 들뜬 상수의 수명(lifetime)라고 한다.

(a) $\tau = 1.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ 일 때 방출되는 빛의 선폭을 구하라.

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar}{2.0 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

$$\Delta E = h\Delta f$$

$$\Delta f = \frac{1}{4\pi \times 10^{-8} \text{ s}} = 8.0 \times 10^6 \text{ Hz}$$

(b) 이 과정에서 생기는 스펙트럼선의 파장이 500nm일 때, 확장정도(fractional broadening)을 구하라.

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 6.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{8.0 \times 10^6 \text{ Hz}}{6.0 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 1.3 \times 10^{-8} ; \text{ fractional broadening}$$

민감한 간섭계로 볼 수 있는 정도의 크기

[연습문제 4]

비 상대론적인 도플러 공식을 사용하여, 1,000K에서 수소원자가 방출하는 500nm 선의 도플러 확장을 계산하라. $\frac{3}{2}k_B T$ 의 에너지를 가지고 관측자와 직접적으로 가까워지거나 멀어지는 원자를 고려하려 그 확장 정도를 계산하라.

답 0.0083nm, 또는 0.083Å

5.5 전자기 파동이라면, 무엇이 파동 치는가?

■ 파동함수 $\Psi(x, y, z, t)$

- 전파하기 위한 매질을 필요치 않는다.
- 복소수로 표현되고 측정되지 않는다.
- $\Psi^* \Psi = |\Psi|^2$; 입자를 발견할 수 있는 확률에 비례

5.6 파동-입자의 이중성

■ 전자 회절을 Ψ 로 기술

Bohr의 상보성(complementarity)

- 전자는 수행하는 실험의 종류에 따라 입자도 될 수 있고 파동도 될 수 있다.
- 입자와 파동의 특성을 동시에 측정할 수 없다.
- 입자와 파동의 두 가지 관점이 모두 필요하고 전자를 제대로 기술하기 위해 이들은 서로 보완적이다.

■ 파동과 입자성을 동시에 측정하는 것이 불가능함을 보여 주는 실험

단일 에너지(단일 파장)의 평행한 전자 빔을 이중 슬릿으로 입사 한다. 검출기로 어떤 위치에 도달하는 전자를 검출한다.

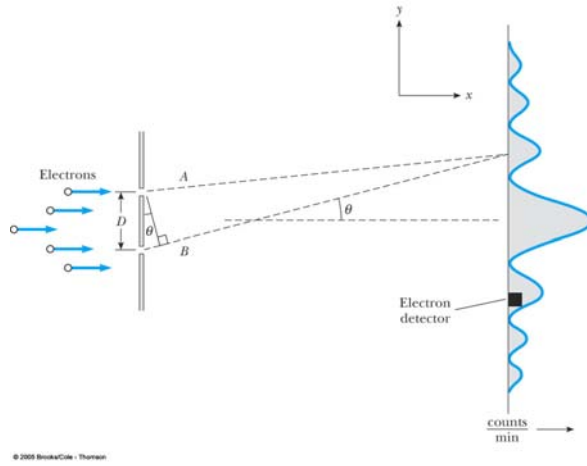


그림 5.23 전자가 어느 순간에 한 지점에서 입자로 검출될 지라도, 그 지점에 도달할 확률은 두 개의 물질파의 세기를 구함으로써 결정된다.

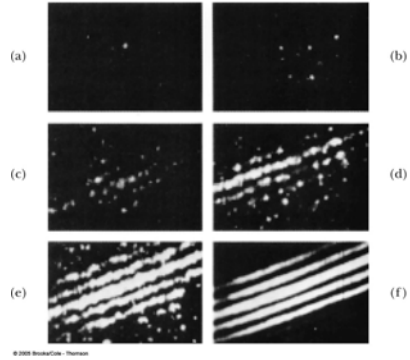
최초의 극소점은

$$D \sin \theta = \lambda / 2$$

$$\lambda = h / p_x \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{h}{2p_x D} \quad (5.30)$$

그림 5.24 전자의 수를 늘려가며 회전시켜 얻은 누적되어 가는 간섭무늬



♣ 두 개의 슬릿 중 하나를 덮었을 때의 검출 형태

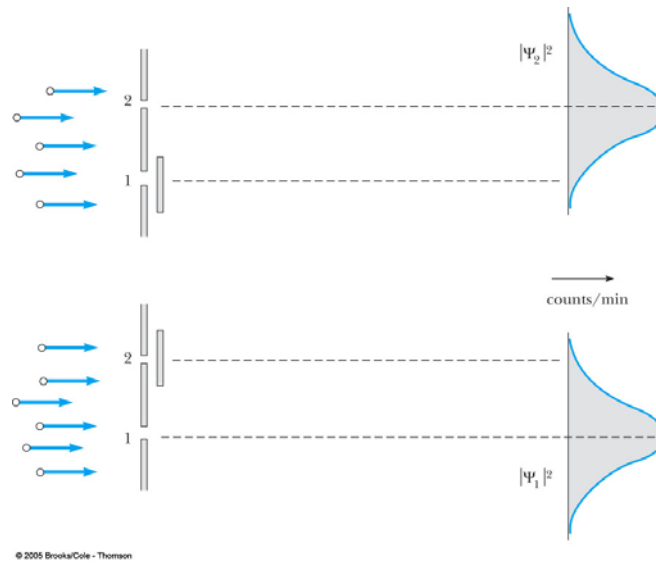


그림 5.25 한 쪽 슬릿이 닫힌 상태에서 스크린에서 전자를 발견할 확률

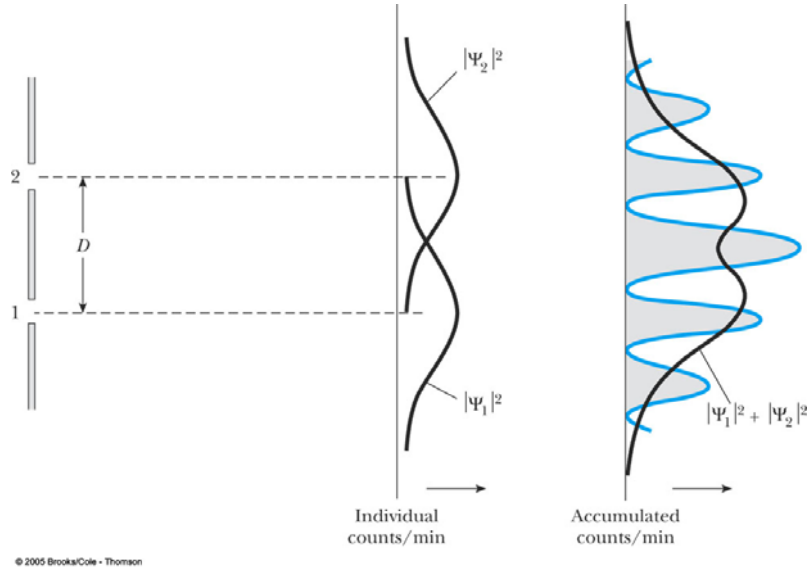


그림 5.26 각각 반시간 동안 닫혀 있는 슬릿을가지고 실시한 이중 전자 회절실험의 누적된 결과 비교를 위하여, 두 슬릿이 열려 있는 경우의 결과는 색으로 나타내었다

- 두 슬릿이 모두 열려 있을 때 전자가 한쪽만을 선택한다는 가정은 틀렸다!
- 전자는 간섭 현상을 보이기 위하여 양쪽 슬릿에 동시에 존재하여야만 한다.

♣양쪽 슬릿이 열려 있는 상태에서 스크린의 특정 지점에서 전자를 검출할 확률

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2|\cos\phi$$

사고 실험 : 어느 슬릿으로 전자가 통과하는지의 측정

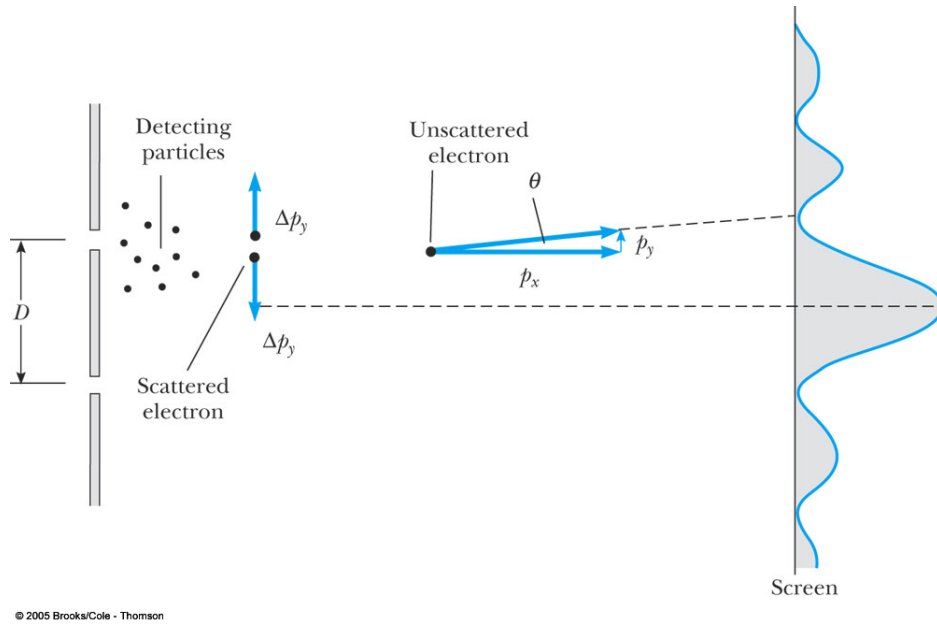


그림 5.28 전자가 어느 슬릿을 통과하는지를 결정하기 위한 사고 실험

전자가 어느 슬릿을 통과하는지를 결정하기 위하여 하나의 작은 입자의 되튐을 관측한다면

$$\Delta y \ll D$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

첫 번째 극소 지점에 도달하여 간섭무늬를 만드는 편향되지 않은 전자는

$$\tan \theta \approx \frac{p_y}{p_x} = \frac{h}{2p_x D}$$

되튐 입자에 산란되는 전자가 간섭무늬를 일으키기 위해서는

$$\frac{\Delta p_y}{p_x} \ll \theta = \frac{h}{2p_x D} \quad \text{or} \quad \Delta p_y \ll \frac{h}{2D}$$

$$\Delta p_y \Delta y \ll \frac{h}{2}$$

이것은 불확정성 원리를 위반한다.

♣ 간섭을 관찰하고 전자가 어느 슬릿을 지나가는지를 모두 알아보는 데 필요한 작은 불확정도는 불가능하다. 왜냐하면 이들이 불확정성 원리를 위반하기 때문이다.

[연습문제 5] 실제 실험에서 어떤 전자들은 검출 입자들을 확인하지 못할 수도 있다. 따라서 검출기에 도달하는 전자를 두 종류로 나누어 볼 수 있다. 검출기에 의해 누적된 것은 어떤 형태의 계수/분의 모양이 되겠는가?

(답) 측정되지 않은 간섭무늬 $|\psi_1 + \psi_2|^2$ 와 측정되는 $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ 의 혼합

5.7 맺음말

■ 원자 세계

- 엄격한 인과율을 따라 상호작용하는 구별되고 불변하는 부분들로 이루어졌다고 가정된 고전적 과정을 만족하지 않는다.
- 측정 도구의 종류가 파동성이나 입자성의 관측을 결정한다. 따라서 측정 장치와 물체를 떼어놓기가 어렵다.

우리의 세계