

3장 빛의 양자론

고전물리(Classical Physics)

●Newton 역학 : 2 개의 간단한 가정(법칙)으로부터 출발

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \text{ and } F = ma$$

●전자기학 : Maxwell 방정식

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

●고전 열역학 : Carnot, 메이어, Helmholtz, Clausius, Kelvin

두 개의 단순한 명제로 분명하고 결정적인 결과를 준다.

●통계역학(열역학) : 확률이론, Maxwell, Clausius, Boltzmann, Gibbs

다체계, 진동(다체계)계의 평균과 요동을 확률적으로 접근

양자론의 태동

●흑체복사이론(Blackbody Radiation) : Max Planck(1900)

가열된 공동에서 나오는 복사 에너지의 세기를 계산하는 고전적인 통계역학의 문제에서 양자역학이 출발

●광전효과(Photoelectric Effect) : Einstein(1905)

●Compton 효과(Compton Effect) : Compton

광양자가 에너지뿐만 아니라 운동량을 운반하는 것을 보여 주는 전자에 의한 빛의 산란

3.1 Hertz의 실험-전자기파로서의 빛

전자기파 : 진동하는 전류에 의해 진동하는 전기장-자기장이 공간으로 전파

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{m/s} \Rightarrow c : \text{광속} : \text{Maxwell}$$

Hertz의 실험

1. 0.5 in 의 간극을 갖는 전기적 진동자를 제작, $5 \times 10^8 \text{Hz}$
2. 작은 간극을 갖는 안테나로 전자기파의 수신을 성공, $\sim 10^2 \text{m}$ 의 거리에서 수신
3. 검출된 복사선의 파장은 $60 \text{cm} (c = \lambda f = 3 \times 10^8 \text{m/s})$
3. 전자기파의 반사, 굴절, 간섭, 편광 등을 확인, 헤르츠의 파동과 광파는 동일한 것임을 확인
4. 진동자의 전극을 깨끗이 잘 닦아야 방전(전자기 복사)이 잘 일어남을 확인. 전극에 자외선을 비추면 방전이 잘 일어난다. →★이것은 양자현상(광전효과)로 설명됨

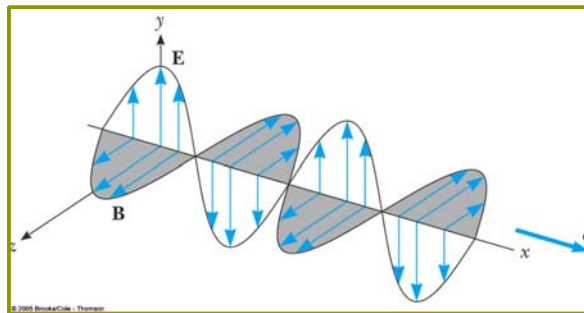


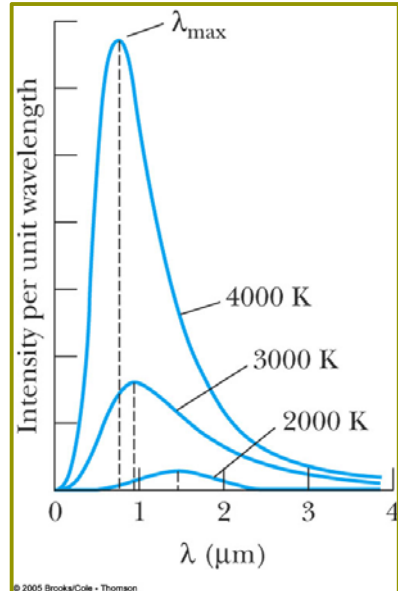
그림 3.2

3.2 흑체복사

Thomas Wedgwood(1792) : 도자기의 장인. 오븐에 있는 모든 물체가 화학적 성질, 크기, 모양에 관계없이 같은 온도에서 붉은 색으로 변한다.

Gustav Kirchhoff(1859) : 복사와 열평형 상태에 있는 모든 물질에 있어서 방출과 흡수의 비율은 빛의 주파수와 물체의 절대온도(T)에만 관계한다.

흑체복사 문제 : 특정온도에서 달구어진 고체에서 방출되는 빛의 파장에 따른 강도(spectrum)의 예측하는 문제 ← 빛이 전자파임이 알려지면서 Gustav Kirchhoff의 발표(1859)에 대한 이론적 설명이 시도되어, 당시의 최대 관심과제로 대두함.



■ Gustav Kirchhoff, 1859년

복사와 열적 평형인 물체의 방출 일률은 흡수 일률에 비례한다.

$$e_f = J(f, T)A_f \quad (3.1)$$

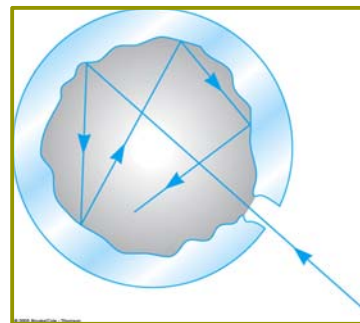
➡ e_f : 방출률(emitting power), 단위면적당, 단위주파수당 가열된 물체로부터 방출되는 복사의 강도(일률;power)

➡ $J(f, T)$: 빛의 진동수(f)와 물체의 절대온도(T)에만 의존하는 우주함수.

➡ A_f : 흡수률(absorbtion power), 단위면적당, 단위주파수당 입사된 복사에 대한 흡수률. 흑체의 경우 $A_f = 1$

■ 흑체(Black Body)

1. $A_f = 1$: 흑체
2. $e_f = J(f, T)$
3. 입사하는 전자기복사를 모두 흡수 → 검게 보인다.
4. 완전 흡수체 또는 이상 복사체
5. 작은 입구를 가진 동공(cavity)



▶ J. Stefan(1879)

뜨거운 고체에서 방출된 단위 면적당의 전체 일률은 절대온도의 네제곱에 비례함을 실험적으로 발견

$$e_{total} = \int_0^{\infty} e_f df = \sigma T^4 \quad \text{: Stefan-Boltzmann 법칙 (3.3)}$$

➡ $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$: Stefan-Boltzmann 상수

→전체 방출률은 절대온도의 4승에 비례한다.

※ Boltzmann이 열역학과 Maxwell 방정식을 이용하여 Stefan의 법칙을 유도하였다.

▶ 이상적인 복사체가 아닌 경우

$$e_{total} = a \sigma T^4, \quad a < 1 \quad (3.4)$$

예제 3.1 태양에 적용된 Stefan의 법칙

태양 표면온도를 계산하라.

$$R_s = 7.0 \times 10^8 \text{m} \quad : \text{태양의 반경}$$

$$R = 1.5 \times 10^{11} \text{m} \quad : \text{지구와 태양간의 평균거리}$$

$$e_{total}(R) = 1400 \text{W/m}^2 : \text{지구에서의 태양광의 평균세기}$$

<풀이>

$$e_{total}(R_s) = \sigma T^4 \quad (3.5)$$

$$e_{total}(R_s) \cdot 4\pi R_s^2 = e_{total}(R) \cdot 4\pi R^2$$

혹은

$$e_{total}(R_s) = e_{total}(R) \cdot \frac{R^2}{R_s^2}$$

(3.5)로부터

$$T = \left[\frac{e_{total}(R) \cdot R^2}{\sigma R_s^2} \right]^{1/4} = 5800 \text{K}$$

태양의 표면온도(2)

흑체의 최대방출 파장(λ_{max})는 흑체가 뜨거워질수록 짧은 파장 쪽으로 이동한다.

Wilhelm Wien(1893)

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K} \quad (3.6)$$

→ Wien의 법칙

$$(\lambda_{max})_{sun} = 500 \text{nm} : \text{태양의 최대방출 파장. green}$$

(3.6)으로부터

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}}{500 \times 10^{-9} \text{m}} = 5800 \text{K}$$

흑체의 스펙트럼 에너지 밀도(Spectral energy density)

흑체 공동내부의 단위주파수당, 단위부피당의 에너지,

$$u(f, T) : \text{spectral energy density}$$

평형상태의 흑체에서

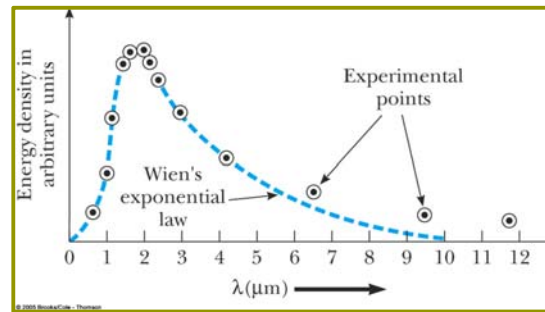
공동입구의 단위면적당 방출 복사파의 일률 \propto

공동 안쪽의 에너지밀도 $\times c/4$

$$J(f, T) = u(f, T)c/4 \quad (3.7)$$

$$u(f, T) = A f^3 e^{-\beta f/T} \quad (3.8)$$

→ Wien의 지수법칙



Friedrich Paschen : 400K ~ 1600K, $\lambda = 1 \sim 4 \mu\text{m}$ 의 적외선 영역에서 Wien의 법칙을 확인하여 비교적 일치함을 보임

Lummer and Pringsheim($18 \mu\text{m}$ 까지, 1900), Rubens and Kurlbaum($60 \mu\text{m}$ 까지, 1900)

: Wien의 법칙이 잘 맞지 않음

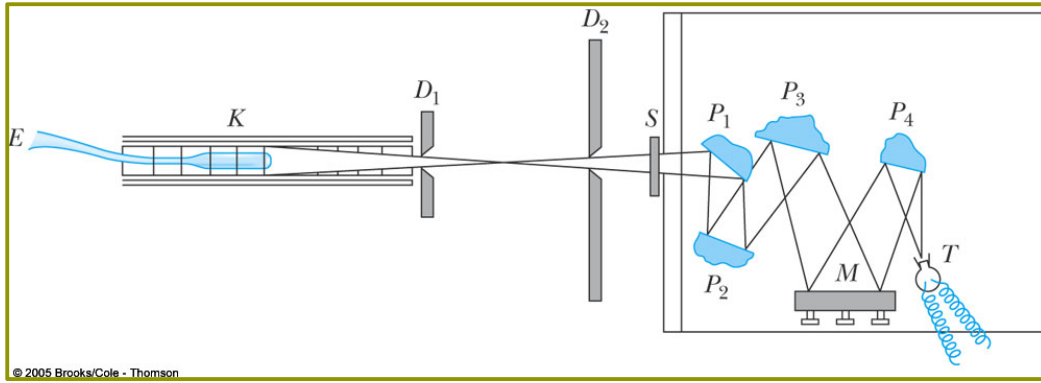


그림 3.6 원적외선 영역의 파장에서 흑체 복사를 측정하는 장치

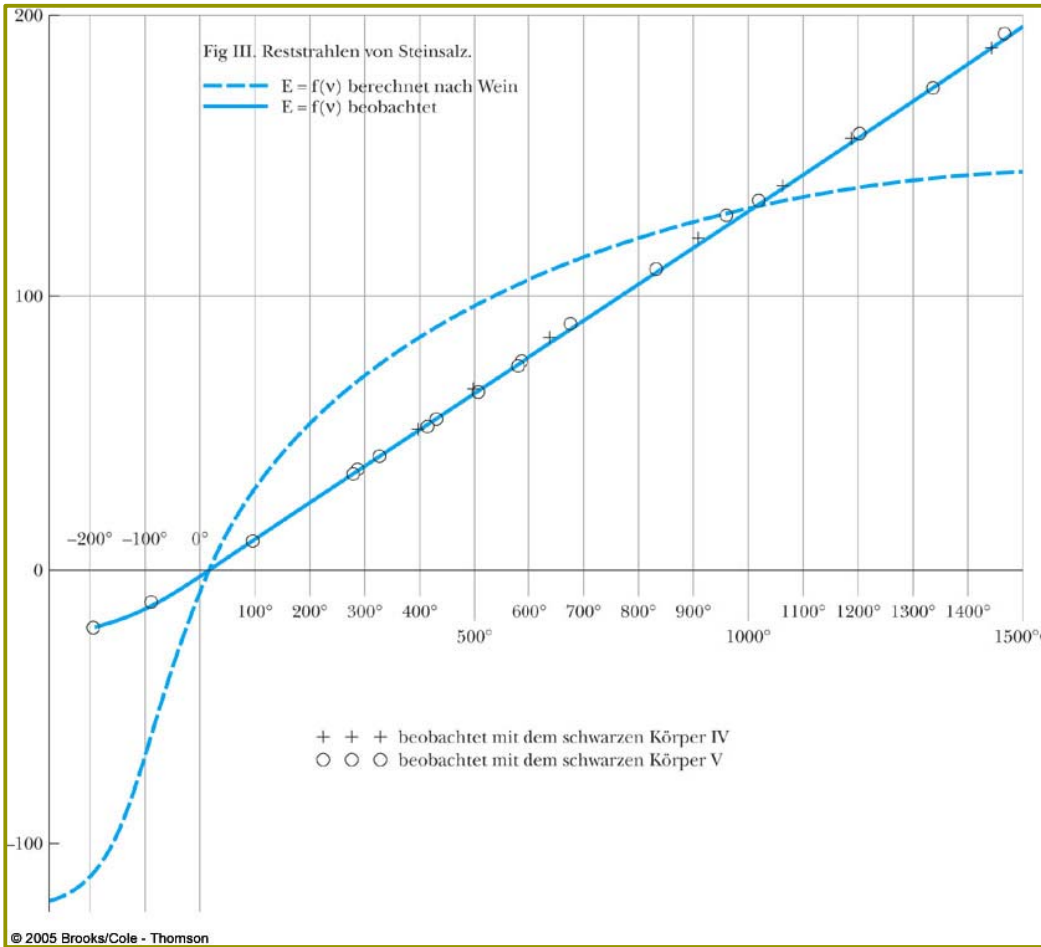


그림 3.7 $51.2\mu\text{m}$ 와 -188°C 부터 1500°C 의 온도 범위에서 이론과 실험적인 흑체 방출곡선의 비교(H. Rubens and S. Kurlbaum, Ann. Physik, 4:649,1901)

Planck의 업적

스펙트럼의 에너지 밀도

고진동수(단파장 영역) : 빈의 지수법칙

저 진동수(장파장 영역) : T에 비례(Rubens). Rubens의 측정

흑체복사 공식의 발견

Max Planck, 1900년 10월 초 일요일 저녁, Rubens의 측정 결과에 대한 해석으로부터

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \right) \quad (3.9)$$

$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$: Plank 상수

→ $k = 1.380 \times 10^{-23} \text{J/K}$: Boltzmann 상수

→ ♣ 운 좋은 추측에 의해 유도한 공식

※ $k_B = N_A/R$ 의 관계에서 N_A 를 계산하는 또 하나의 방법을 제공한다.

▶ 높은 주파수(단파장)영역 : $hf/kT \gg 1$

$$\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \approx e^{-hf/kT}$$

이므로

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \right) \approx \frac{8\pi hf^3}{c^3} e^{-hf/kT}$$

→ Wien의 지수법칙

▶ 낮은 주파수(장파장)영역 : $hf/kT \ll 1$

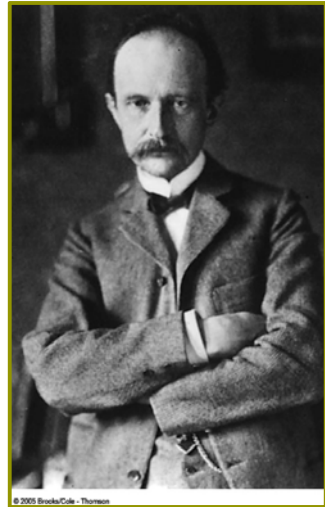
$$\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{hf}{kT} + \dots - 1} \approx \frac{kT}{hf}$$

이므로

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \right) \approx \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

→ 에너지 밀도가 온도(T)에 비례 한다.

→ 고전적 영역. Rubens가 발견한 저 진동수 영역



에너지의 양자

Planck의 원래의 연구의 정신과 혁명적인 충격

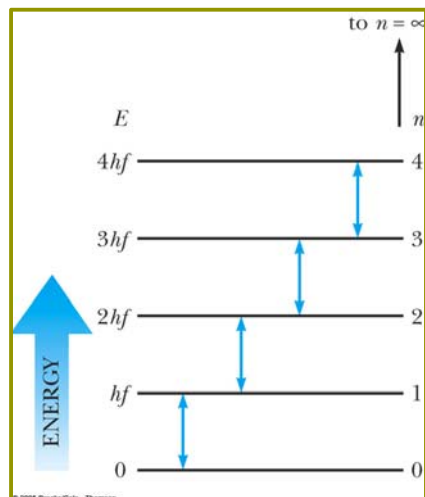
흑체복사는

1. 공동이 미시적인 서로 다른 주파수로 진동하는 전기진동자(혹은 공명자, 확실한 성질은 모르지만)로 구성
2. 각각의 공명자는 그것의 진동 주파수에 해당하는 복사파를 방출한다.
3. 주파수 f 인 공명자의 에너지는 양자화되어 있다.

$$E_{resonator} = nhf, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

4. 공명자의 에너지의 변화는 항상 다음을 만족하여 주파수 f 인 복사파를 방출한다.

$$\Delta E = hf \quad (3.11)$$



예제 3.2 양자 진동자와 고전 진동자

Planck의 가설의 의미를 알아본다.

(a) 녹색(540nm)와 빨강(700nm)빛을 내보내는 진동자의 최소에너지 변화는 얼마인가?

$$\begin{aligned}\Delta E_{green} &= hf = \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8 \text{m/s})}{540 \times 10^{-9} \text{m}} \\ &= 3.68 \times 10^{-19} \text{J}\end{aligned}$$

광양자의 에너지는 전자볼트(eV) 단위로 표시하면 더 편리하다.

$$1 \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{J}$$

$$hc = 1.240 \times 10^{-6} \text{eV} \cdot \text{m} = 1240 \text{eV} \cdot \text{nm}$$

∴ 녹색과 빨강 빛의 양자(최소에너지의 변화)는

$$\Delta E_{green} = \frac{1240 \text{eV} \cdot \text{nm}}{540 \text{nm}} = 2.30 \text{eV}$$

$$\Delta E_{red} = \frac{1240 \text{eV} \cdot \text{nm}}{700 \text{nm}} = 1.77 \text{eV}$$

➡ 1) 에너지의 양자는 주파수에 비례한다.

➡ 2) 가시광의 양자는 수 전자볼트 정도이다.

(b) 길이 1m인 단진자의 최소에너지 변화

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0.50 \text{Hz}$$

$$\Delta E = hf = 2.1 \times 10^{-15} \text{eV}$$

➡ → 거의 '영'에 가까운(영보다 더 적은?)에너지

$m = 100 \text{g}$, $l = 1 \text{m}$, $\theta = 10^\circ$ 인 진자가 가지는 에너지

$$\begin{aligned}E &= mgl(1 - \cos\theta) \\ &= (0.1 \text{kg})(9.8 \text{m/s}^2)(1 - \cos 10^\circ) \\ &= 0.015 \text{J}\end{aligned}$$

에너지의 상대적 변화는

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3.3 \times 10^{-34} \text{J}}{1.5 \times 10^{-2} \text{J}} = 2.2 \times 10^{-32}$$

거시적인 진동계(단진자 같은)는, 낮은 주파수를 가지기 때문에, 에너지의 양자화는 관측할 수 없다. → 연속적인 에너지의 변화를 갖는 것처럼 보인다.

연습문제 2 진동자의 양자수

$E = 1.5 \times 10^{-2} \text{J}$ 인 진동자의 양자 수 n 을 계산하라.

$$\text{답 } n = 4.6 \times 10^{31}$$

연습문제 3 용수철에 매달린 단진자

$m = 300 \text{g}$, $k = 10 \text{N/m}$, $A = 10 \text{cm}$

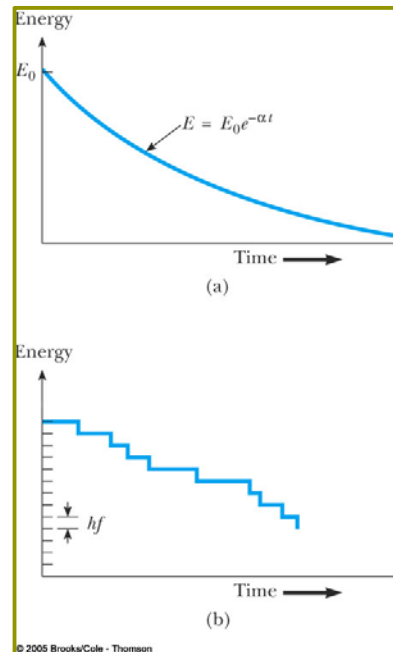
(a) 전체 에너지를 구하여라.

(b) 진동수를 구하라.

(c) 계가 하나의 에너지 양자를 잃을 때 진폭의 변화를 계산하라.

$$\text{답 (a) } E_{\text{total}} = 0.051; \text{ (b) } f = 0.92 \text{Hz}; \text{ (c) } \Delta E_{\text{quantum}} = 6.1 \times 10^{-34} \text{J}$$

$$\Delta A \approx -\frac{\Delta E}{\sqrt{2Ek}} = -6.1 \times 10^{-34} \text{m}$$



□ 연속적인 진동수의 빛을 복사하는 흑체

$$u(f, T)df = \bar{E}N(f)df \quad (3.12)$$

➡ $N(f)df$: 주파수 $f \sim f + df$ 사이의 진동자의 개수

➡ \bar{E} : 진동자당 평균에너지

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3}df \quad (3.13)$$

(3.13)을 (3.12)에 대입하면

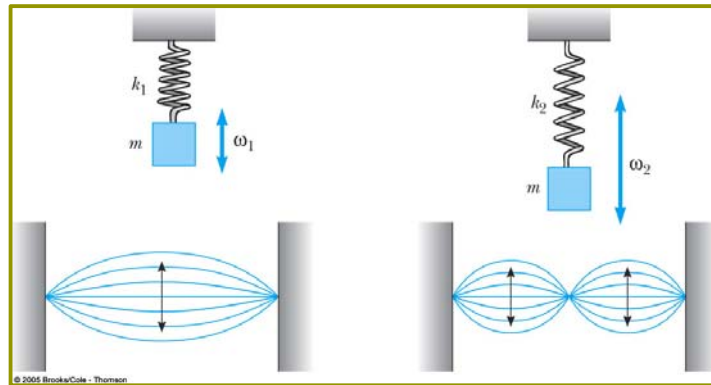
$$u(f, T)df = \bar{E} \frac{8\pi f^2}{c^3}df \quad (3.14)$$

높은 주파수에서는 $u(f, T)$ 가 영으로 접근하므로 \bar{E} 는 $\frac{1}{f^2}$ 보다 빠르게 영으로 접근하여야 한다.

3.3 Rayleigh-Jeans 법칙과 플랑크의 법칙

□ 흑체복사의 고전이론

공동내부의 전자기파 : 1차원 (정상파)진동자로 간주



Spectrum의 에너지 밀도는

$$u(f, T)df = \bar{E}N(f)df$$

➡ $N(f, T)df$: $f \sim f + df$ 사이의 정상파의 개수
or 단위체적당 기준방식(normal mode)의 개수

$\bar{E} = k_B T$: 정상파의 평균 에너지

➡ →Maxwell-Boltzmann의 분포법칙(고전론)

최소 에너지 E_0 보다 큰 에너지를 가질 확률

$$P(E) = P_0 e^{-(E-E_0)/kT} \quad (3.15)$$

➡ P_0 : 계가 최소에너지 E_0 를 가질 확률

▶ Boltzmann의 분포법칙은 진동자가 연속적인 에너지를 가질 때(고전 진동자)이다.

$$\bar{E}_{\text{classical}} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = k_B T$$

▶ 허용된 에너지가 불연속적일 때(양자화 되었을 때)

$$\bar{E} = \frac{\sum E \cdot P(E)}{\sum P(E)} \quad (3.16)$$

(2.13)으로부터 Spectrum의 에너지 밀도는

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (3.45)$$

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (3.46)$$

이므로

$$u(f, T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T df \quad (3.17)$$

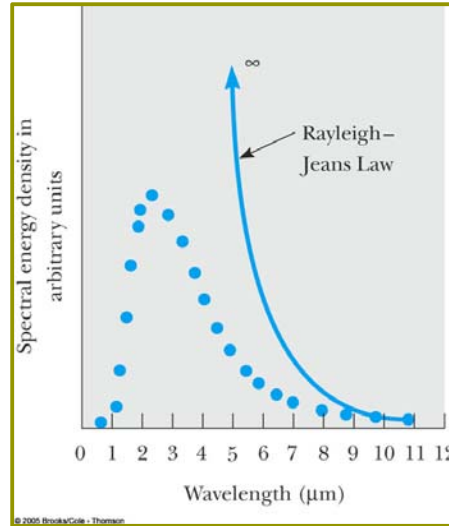
파장으로 나타내면

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T d\lambda \quad (3.18)$$

→ Rayleigh-Jeans 흑체복사법칙

▶ Rayleigh-Jeans의 복사법칙은 자외선 영역에서 발산하여 실험과 일치하지 않는다.

→ 자외선 파탄. 고전물리(양자현상을 인정하지 않는) 스스로 모순을 들어낸 셈!



Planck 흑체복사법칙의 유도

▶ Planck의 가설

1. 진동자의 에너지는 양자화 된다.

$$E_n = nhf$$

2. 진동자의 에너지 변화의 조건

$$\Delta E = hf$$

이 과정에서 진동수 f 인 복사파를 방출한다.

▶ 양자화된 에너지, $E_n = nhf$ 를 가질 때의 진동자의 평균에너지

$$P(n) = P_0 e^{-nhf/kT}$$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (nhf) P_0 e^{-nhf/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} P_0 e^{-nhf/kT}}$$

위 식을 계산하면

$$\bar{E} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad (3.19)$$

$N(f)$ 를 \bar{E} 에 곱하여 Planck의 분포식을 얻는다

$$u(f, T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right) df \quad (3.9)$$

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right)$$

→ Planck의 흑체복사법칙

파장 λ 로 표현하면

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hcd\lambda}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \quad (3.20)$$

▶ Planck의 흑체복사법칙의 음미

1) Low frequency $hf \ll kT$ 인 경우 : 장파장영역

$$\bar{E} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{hf}{1 + hf/kT + \dots - 1} \simeq \frac{hf}{hf/kT} = kT$$

→ 고전론(R-J의 법칙)과 일치

2) High frequency $hf \gg kT$ 인 경우 : 단파장영역

$$\bar{E} \simeq hfe^{-hf/kT} \simeq 0$$

$$\therefore u(f, T) \Rightarrow 0$$

→ 자외선 영역의 거동을 잘 설명한다. 자외선 파멸을 피할 수 있다.

♣ Planck의 양자화 가설은

(1) $E = nhf$; 에너지의 양자화

(2) $\Delta E = hf$; 빛의 흡수 또는 방출, 또는 진동자의 에너지 변화

♣ 자포자기의 심정에서 마지못해 택한 가설이었고, 단지 흑체복사에만 적용되는 현상으로 생각하였다. 그러나 양자화 현상은 물리량이 연속적으로 분포하는 현상보다 훨씬 일반적인 현상이다.

예제 3.3 플랑크 복사로부터 스테판(Stefan)의 법칙 유도

스테판의 법칙

$$e_{\text{total}} = 5.67 \times 10^{-8} T^4 \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

풀이

$$e_{\text{total}} = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} d\lambda$$

$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ 로 치환하면 적분은 다음의 형태를 띠게된다.

$$e_{\text{total}} = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx$$

그런데

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

이므로

$$e_{\text{total}} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4$$

k_B, c 와 h 를 대입하면

$$\sigma = \frac{(2)(3.14)^5 (1.381 \times 10^{-23} \text{J/K})^4}{(15)(2.998 \times 10^8 \text{m/s})^2 (6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})^3} \quad ; \text{ 스테판-볼츠만 상수}$$

$$= 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

연습문제 4 다음을 보여라

$$\int_0^\infty \frac{2\pi kc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} d\lambda = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx$$

3.4 빛의 양자화와 광전효과

1905년 Einstein의 세 가지 다른 주제에 대한 불멸의 논문

- 1) 빛의 생성과 변환에 관한 혁명적인 관점 ; 광전효과,
A. Einstein, Ann. Physik, 17:132, 1905 (3월)
- 2) 열의 분자 운동에서 필요한 액체에 매달린 입자의 운동에 관해서 ; 브라운 운동
A. Einstein, Ann. Physik, 17:549, 1905 (5월)
- 3) 운동하는 물질의 전기동역학에 관해서 ; 특수 상대론
A. Einstein, Ann. Physik, 17:891, 1905 (6월)

광전효과의 발견 : Hertz의 전자가파 이론(Maxwell)의 확인과정

■ Lenard의 실험(1900년)

1. 금속면에 빛을 쬐면 음전기를 띤 입자가 방출, 전자(e/m), 광전자
2. 광전류는 빛의 세기에 비례
3. 저지전압 ; 전자가 운동에너지를 가지고 방출

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = e V_s \quad ; \quad \text{최대운동}$$

에너지

V_s ; 저지전압

4. 저지전압은 빛의 세기에는 무관
5. 저지전압(최대운동에너지)은 빛의 진동수에 비례(Millikan의 실험)
6. 문지방진동수의 존재
7. 지연시간은 빛의 세기에 관계없다. (10^{-9} s 이하, Lawrence and Beams)

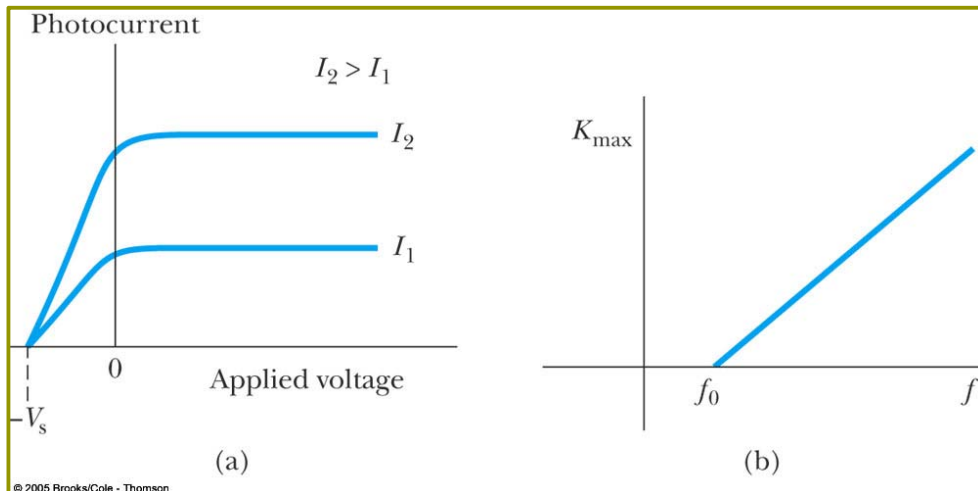
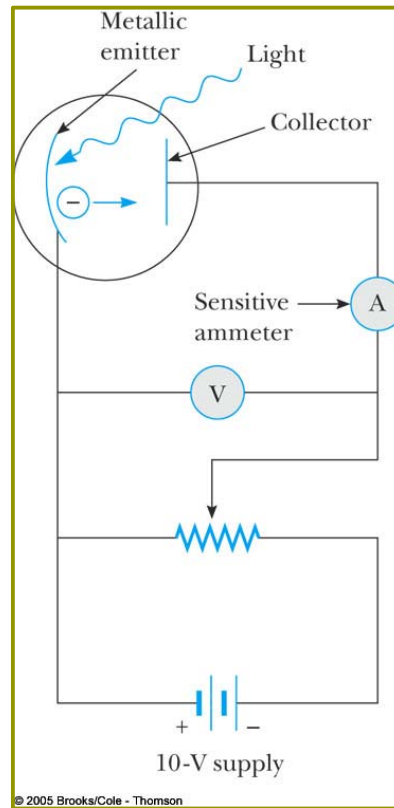


그림 3.15(a)광전류와 인가전압의 관계. 진동수가 일정한 경우 K_{\max} 는 빛의 세기에 무관함을 보여주고 있다. (b) 빛의 진동수에 따른 K_{\max} 의 관계

예제 3.4 맥스웰이 깜짝 놀란다.

Na으로부터의 광 방출에 대한 고전론적인 관점

- (a) K_{\max} 가 입사 빛의 세기 I에 의존
- (b) K_{\max} 가 입사 빛의 진동수에 무관하고
- (c) 지연시간이 예견된다. $\phi = 2.28\text{eV}$, 흡수일률 = $1.00 \times 10^{-7} \text{mW/cm}^2$

풀이

- (a) 광파의 에너지는 파면 전체에 걸쳐서 균일하고 연속적으로 퍼져나간다.
모든 광흡수는 금속의 윗면의 원자층에서 일어난다.
각 원자는 그의 단면적 A에 비례하는 똑 같은 에너지의 양을 흡수한다.
각각의 전자는 t동안 에너지 K를 다음과 같이 흡수한다.

$$K = CIA t$$

$$K_{\max} = CIA t - \phi \quad (3.22)$$

$CIA t < \phi$; 약한 빛의 세기에서 t동안 전자가 방출되지 않는다.

$CIA t > \phi$; 강한 빛의 세기에서 빛의 세기가 클수록 더 큰 운동에너지를 가지고 방출된다.

- (b) 광파의 세기 I는 전기장의 진폭의 제곱에 비례한다.

$$I \approx E_0^2$$

$$K \approx CE^2 A t ; \text{진동수에는 무관하다.}$$

- (c) 전자는 일함수를 극복하기 위하여 충분한 에너지를 축적해야만 한다.

$$K_{\max} = CIA t - \phi = 0$$

$$t = \frac{\phi}{CIA} = \frac{\phi}{IA}$$

$A = \pi r^2$, $r = 1.0 \times 10^{-8} \text{cm}$; 원자의 반경으로 두면

$$t = \frac{2.28\text{eV} \times 1.60 \times 10^{-16} \text{mJ/eV}}{(10^{-7} \text{mJ/s} \cdot \text{cm}^2)(\pi \times 10^{-16} \text{cm}^2)}$$

$$= 1.2 \times 10^7 \text{s} \approx 130 \text{days}$$

실제의 지연시간 $t = 10^{-9} \text{s}$ 와 10^{16} 배 차이가 난다!!!!

연습문제 5 I-V 곡선

그림 3.15a에서 I-V곡선은 $-V_s$ 와 0 사이에서 왜 천천히 증가하는가? 즉, I-V곡선은 $-V_s$ 에서 왜 급격히 위로 증가하지 않는가? 금속내의 전도 전자에 관한 어떤 통계적인 정보가 I-V곡선에 담겨져 있는가?

□ Einstein의 광양자론(1905)

1. Plank의 에너지의 양자화는 빛의 보편적 특성
2. 빛의 에너지 : 양자화된 photon(광양자)으로 전자와 상호작용

$$E = hf : \text{photon의 energy}$$

3. 저지전압 V_s

$$K_{\max} = eV_s = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = hf - \phi \quad (3.23)$$

→ ϕ : 일함수(work function), 금속에서 전자 한 개를 떼어내는데 필요한 에너지

4. 문지방진동수(threshold frequency)

$$\phi = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_t}, \quad \text{here } \lambda_t = \text{문지방진동수}$$

$$hc = (4.14 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{sec})(3 \times 10^8 \text{m/sec})(10^{10} \text{\AA}/\text{m})$$

즉

$$hc = 1.24 \times 10^4 \text{eV} \cdot \text{\AA}$$

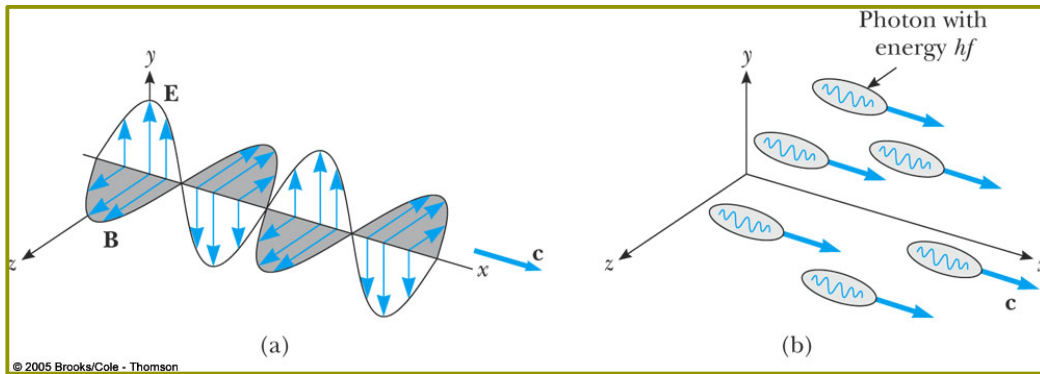
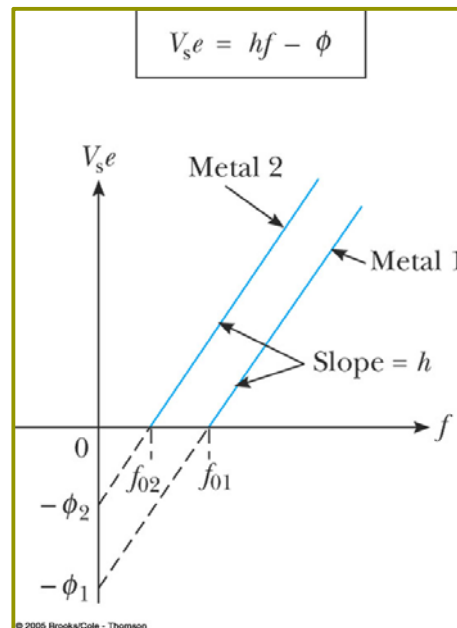


표 3.1 여러 금속의 일함수

금속	일함수(ϕ) (eV)
Na	2.28
Al	4.08
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14
Fe	4.50



예제 3.5 아연에서의 광전 효과

Lenard의 실험에서 Na에 쏘인 자외선에서 4.3V의 전압에서 광전자가 저지되었다. 이들 전자의 K_{\max} 와 v_{\max} 를 구하여라.

풀이

$$K_{\max} = e V_s = (1.6 \times 10^{-19} \text{C})(4.3 \text{V}) = 6.9 \times 10^{-19} \text{J}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2e V_s}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(6.9 \times 10^{-19} \text{J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{kg}}}$$

$$= 1.2 \times 10^6 \text{m/s}$$

예제 3.6 철에 대한 광전 효과

세기가 $I = 1.0 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ 인 빛이 $A = 1.0 \text{cm}^2$ 인 깨끗한 철에 입사한다. 철은 빛의 96%를 반사하고 흡수 에너지의 3.0%만이 임계 진동수 위의 자외선 스펙트럼 영역이라고 가정한다

(a) 광전효과에 사용된 빛의 세기는 얼마인가?

$$I = (0.030)(0.040)I_0 = (0.030)(0.040)(1.0 \mu\text{W}/\text{cm}^2) = 1.2 \text{nW}/\text{cm}^2$$

(b) 자외선 영역의 모든 광자의 파장이 250nm라면, 매 초당 방출되는 전자의 수는 얼마인가.

$$n = \frac{1.2 \times 10^{-9} \text{W}}{hf} = \frac{\lambda(1.2 \times 10^{-9})}{hc}$$

$$= \frac{(250 \times 10^{-9} \text{m})(1.2 \times 10^{-9} \text{J/s})}{(6.6 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})(3.0 \times 10^8 \text{m/s})} = 1.5 \times 10^9$$

(c) 광 튜브에서의 전류를 암페어 단위로 계산하여라.

$$i = (1.6 \times 10^{-19} \text{C})(1.5 \times 10^9 \text{electrons/s}) = 2.4 \times 10^{-10} \text{A}$$

이 전류를 측정하기 위해서는 민감한 전류계(electrometer)가 필요하다.

(d) 차단 진동수가 $f_0 = 1.1 \times 10^{15} \text{Hz}$ 이면, 철의 일함수는 얼마인가?

$$\phi = hf_0 = (4.14 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s})(1.1 \times 10^{15} \text{s}^{-1}) = 4.5 \text{eV}$$

(e) $\lambda = 250 \text{nm}$ 의 빛으로 광전자가 방출된다면 철의 저지 전압은 얼마인가?

$$e V_s = hf - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

$$= \frac{(4.14 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s})(3.0 \times 10^8 \text{m/s})}{250 \times 10^{-9} \text{m}} - 4.5 \text{eV} = 0.46 \text{eV}$$

따라서 저지전압은

$$V_s = 0.46 \text{V}$$

3.5 Compton 효과와 X선

□ Einstein의 광전효과 : 빛의 입자설

- ▶ 광양자(photon)가 가지는 에너지만을 고려하고 운동량은 고려하지 않음
- ▶ 1923년 Peter Debye 와 Arthur Compton

1. X-선 광자와 전자와의 산란을 고려

$$E = hf, \quad p = hf/c$$

→ 충돌과정에서 상대론적 에너지와 운동량이 보존된다.

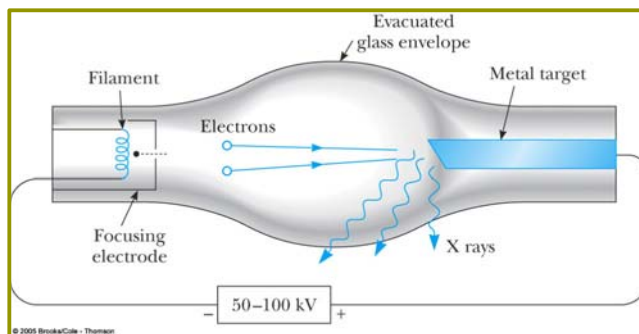
2. 빛의 입자설의 완결

▶ Compton 효과

빛이 입자라면 → 빛과 전자와의 충돌이 크기가 다른 당구공들의 충돌과 같을까?

W. Roentgen : 1895년 X-선 발견
음극선관에서 투과성 광선이 방출

- 1) 투과성
- 2) 형광막을 발광
- 3) 사진 건판을 감광
- 4) 전, 자장에서 직진
- 5) 굴절, 간섭이 없다(?)
- 6) → X-선



1899년 Haga, Wind

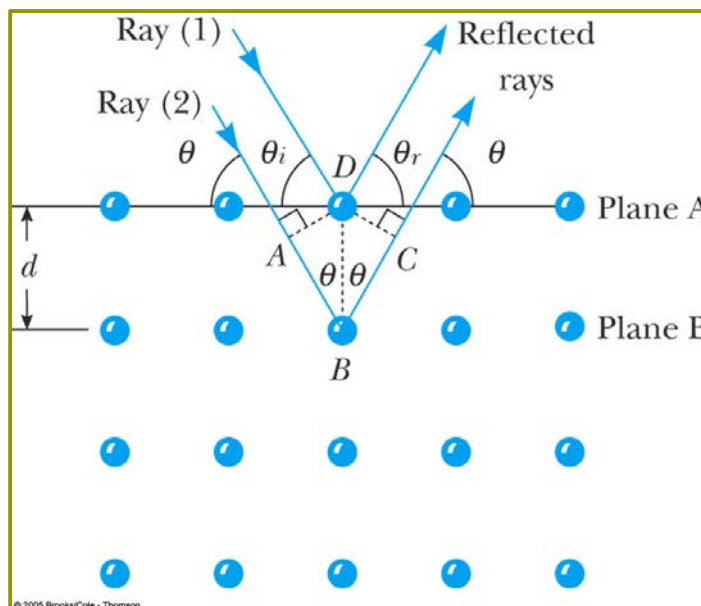
- 1/1000 mm인 slit를 통과한 X-선의 폭이 약간 넓어진다
- 파동(?), 전자기파(?), $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$

1912년 Laue

결정이 X-선을 산란시키는 slit 구실을 할 수 있다.

Friedrich, Knipping : Laue spot 관측, $\lambda \approx 0.1 \sim 0.5 \text{ \AA}$

- 1) X-선은 전자기파
- 2) 결정속의 원자는 규칙적으로 배열



William Lawrence Bragg(1912)

결정에 의한 X-선 회절의 해석, Bragg평면

Bragg condition : 보강간섭의 조건

$$AB + BC = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25a)$$

William Henry Bragg ; 결정 분광계의 제작
Daune-Hund의 법칙

$$eV = hf = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{1.24 \times 10^4}{eV} \text{ \AA}$$

→ 전자의 총 운동에너지(eV)가 전부 하나의 광양자(photon)을 생성시키는데 소요된 경우

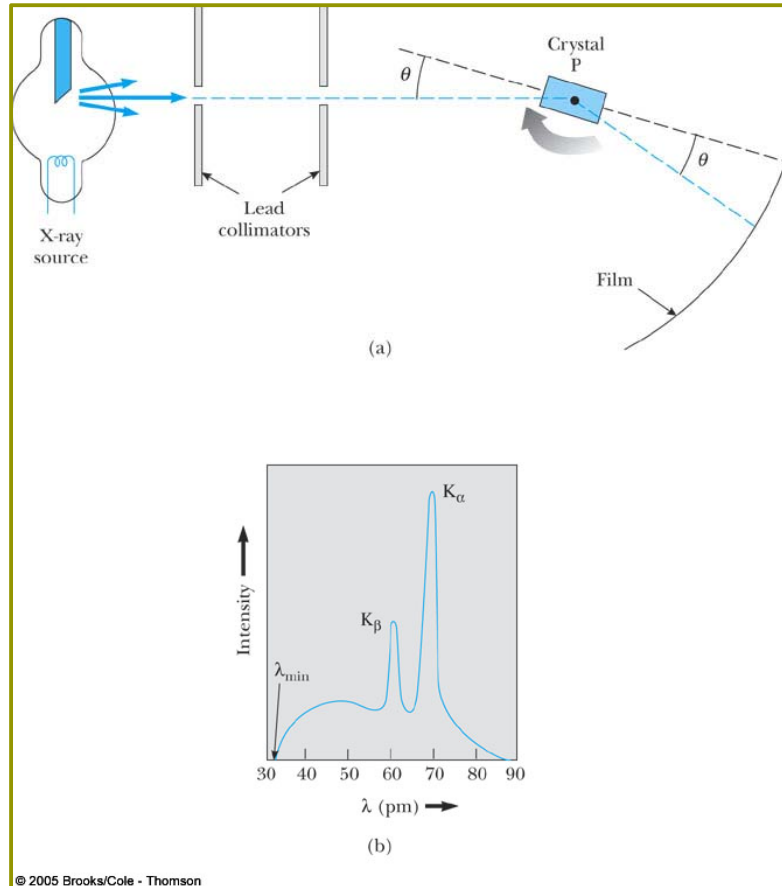


그림 3.21 (a) X-선 분광계 (b) 35keV의 전자를 몰리브덴 표적에 충돌시켜 얻은 X-선 스펙트럼

Compton 산란

전자에 의한 X-선의 산란

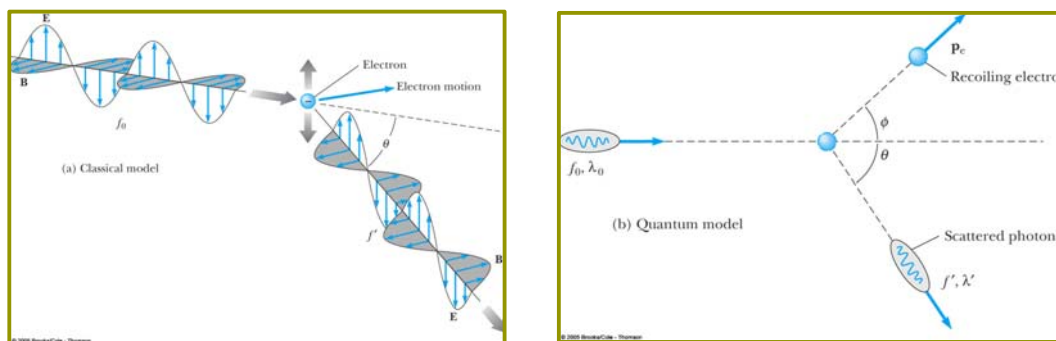


그림 3.22 전자로부터의 X-선 산란 : (a) 고전적인 모형, (b) 양자 모형

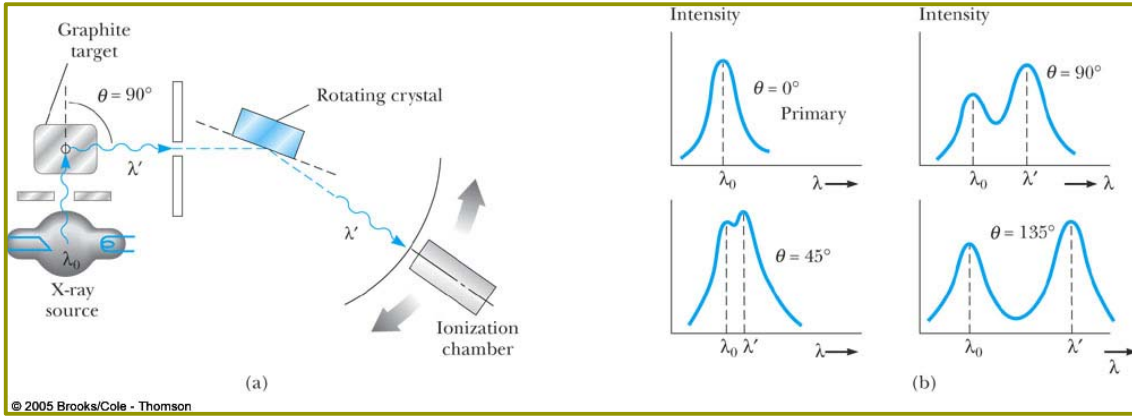


그림 3.23 (a) 콤프턴 장치의 대략적인 그림 (b) 산란된 X-선의 세기

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \quad (3.27) \text{ 콤프턴 효과}$$

$$\frac{h}{m_e c} = 0.0243 \text{ \AA} = 0.00243 \text{ nm} \quad \text{콤프턴 파장}$$

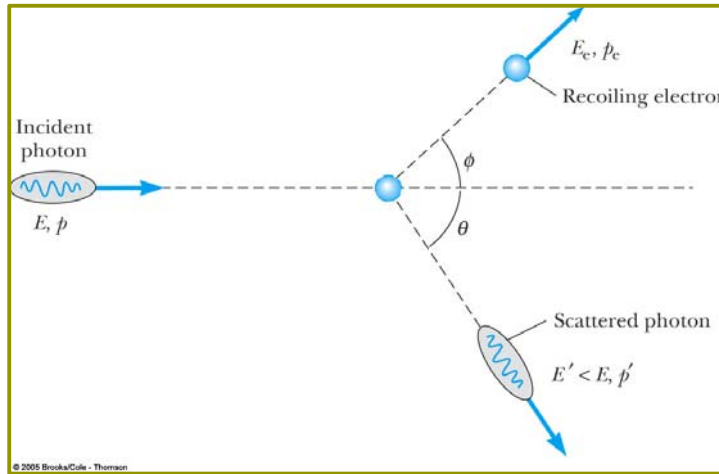


그림 3.24 전자에 의한 광자의 콤프턴 산란을 나타내는 그림. 산란 광자는 입사광자보다 더 작은 에너지(또는 더 긴 파장)를 갖는다.

전자의 energy 흡수 → X-선의 파장이 길어진다.

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

및

$$p' = \frac{E'}{c} = \frac{hf'}{c} = \frac{h}{\lambda'}$$

가전자의 결합에너지는 X-선의 에너지(12,000 eV, λ=1Å)에 비해 훨씬 작으므로 자유전자로 취급

운동량보존원리에서

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$$

혹은

$$p_e^2 = p^2 + (p')^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = p^2 + (p')^2 - 2pp' \cos\theta \quad (*)$$

전자의 정지에너지 $E_0 = m_e c^2$

충돌 후의 전자의 에너지는 $E_e = (E_0^2 + p_e^2 c^2)^{1/2}$

에너지보존에서

$$pc + E_0 = p'c + (E_0^2 + p_e^2 c^2)^{1/2}$$

$p'c$ 항을 이항하고 제곱하면

$$E_0^2 + c^2(p-p')^2 + 2cE_0(p-p') = E_0^2 + p_e^2 c^2$$

또는

$$p_e^2 = p^2 + (p')^2 - 2pp' + \frac{2E_0(p-p')}{c} \quad (**)$$

식(*)와 (**)로부터 p_e^2 을 소거하면

$$\frac{E_0}{c}(p-p') = pp'(1-\cos\theta)$$

양쪽 항에 $hc/pp'E_0$ 를 곱하고 $\lambda = h/p$ 이므로

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda_0 &= \frac{hc}{E_0}(1-\cos\theta) && \text{(Compton의 식)} \\ &= \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

전자의 Compton 파장

$$\lambda_e = \frac{hc}{E_0} = \frac{1.24 \times 10^4 \text{eV} \cdot \text{\AA}}{0.51 \times 10^6 \text{eV}} = 0.0243 \text{\AA}$$

$$\begin{aligned} * \quad \lambda' - \lambda_0 &= 0.0243 \text{\AA}, && \text{when } \theta = 90^\circ \\ (\lambda' - \lambda_0)_{\max} &= 0.0486 \text{\AA}, && \text{when } \theta = 180^\circ \end{aligned}$$

- ➡ 1. $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0$ 는 입사선의 파장에는 무관, 산란각 θ 에만 관계
- ➡ 2. $\Delta\lambda/\lambda_0$ 이 상당히 큰 값이라야 관측 가능 → 단 파장(X-선)에서 관측
- ➡ 3. 전자기복사와 전자(입자)와의 에너지 교환 → 입자와 입자와의 상호작용

예제 3.7 탄소에 대한 콤프턴 이동

$\lambda = 0.200\text{nm}$ 인 X-선이 탄소 블록에 입사하여 산란각 45.0° 로 산란하였다. X-선의 증가한 파장은?

풀이

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \\ &= 0.0223 \text{\AA} \times (1-\cos 45^\circ) \\ &= 7.11 \times 10^{-13} \text{m} = 0.00071 \text{nm} \\ \lambda &= \Delta\lambda + \lambda_0 = 0.20071 \text{nm} \end{aligned}$$

연습문제 6

이 충돌에서 광자가 잃은 에너지의 비를 구하여라.

답 $\Delta E/E = 0.00355$

예제 3.8 X-선 광자와 가시광선 광자

- (a) 콤프턴 실험에서 가시광선보다 x-선 광자를 사용한 이유는 무엇인가?
 다음의 경우에 흑연으로부터 90° 에서 산란된 경우의 콤프턴 이동을 계산한다.
 (1) $\lambda = 0.0106 \text{ \AA}$ Co에서 나온 γ -선 (2) $\lambda = 0.712 \text{ \AA}$ Mo에서 나온 x-선
 (3) $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ Hg-Lamp에서 나온 녹색 빛

풀이

- (a) 파장의 이동은 입사선의 파장에는 상관없이

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = (0.0243 \text{ \AA})(1 - \cos 90^\circ) = 0.0243 \text{ \AA}$$

Co의 γ -선

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243 \text{ \AA}}{0.0106 \text{ \AA}} = 2.29$$

Mo의 x-선

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243 \text{ \AA}}{0.712 \text{ \AA}} = 0.0341$$

Hg-Lamp의 가시광선

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243 \text{ \AA}}{5461 \text{ \AA}} = 4.45 \times 10^{-6}$$

범에는 입사와 산란된 파장이 동시에 존재하기 때문에 $\Delta\lambda/\lambda$ 가 수 % 또는 $\lambda_0 \leq 1 \text{ \AA}$ 인 경우에 쉽게 분해할 수 있다.

- (b) 탄소의 자유전자의 일함수는 4eV 정도이다. $\lambda_0 = 0.712 \text{ \AA}$ 인 x-선의 경우 왜 무시할 수 있는가?

x-선 광자의 에너지는

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12400\text{eV} \cdot \text{\AA}}{0.712 \text{ \AA}} = 17400\text{eV}$$

4eV 정도의 결합에너지는 무시할 수 있다.

3.6 입자-파동의 상보성

입자-파동의 이중성

Compton 산란, 광전효과 : 입자적 성질

간섭, 회절 : 파동적 성질

$E = hf, p = \frac{h}{\lambda}$ 입자적 관점을 표현하는 관계식에서 파동의 물리량 f, λ (진동수와 파장)은 어떤 의미인가?

빛의 입자적 모형과 파동적 모형이 서로 상보적인 관계로 조합되었을 때에만 빛의 현상을 완전히 이해할 수 있다. \Leftrightarrow 서로 배타적인 관계가 아니다.

Bohr : “각각의 과정을 입자 또는 파동으로 설명할 수 있지만, 반면에 입자 또는 파동을 구분하는 모든 성질을 동시에 결정할 수 없기 때문에, 우리는 다루고 있는 것이 실제로 입자인지 파동인지를 증명하는 것은 우리 능력 밖의 일이다. 그러므로 파동과 입자로의 설명은 같은 물체를 보는 상보적인 관계라고 말할 수 있다.”

고전적 파동과 고전적 입자는, 엄격하게 말하면, 존재하지 않는다.

3.7 중력이 빛에 영향을 주는가?

☐ 광자의 질량

$E = mc^2$, m : 관성질량 : Einstein의 상대론
따라서 광자의 관성질량은

$$m_i = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2} \quad (3.35)$$

$$m_i = \frac{p}{c} = \frac{hf}{c^2}$$

☞ 광자도 중력질량을 가질까?

◆ 관성질량과 중력질량은 구분되지 않는다. 즉 두 질량은 같다. ← 일반상대론의 등가원리

◆ 그러므로 관성질량을 가지는 광자는 중력질량도 가져야 한다.

☐ 낙하하는 광자

$A(h = H) \rightarrow A(h = 0)$ 로 낙하하는 광자
광자의 에너지 보존을 적용한다.

$$KE_B + PE_B = KE_A + PE_A$$

$$hf' + 0 = hf + \left(\frac{hf}{c^2}\right)gH$$

$$\Rightarrow (hf/c^2) : A지점의 관성질량$$

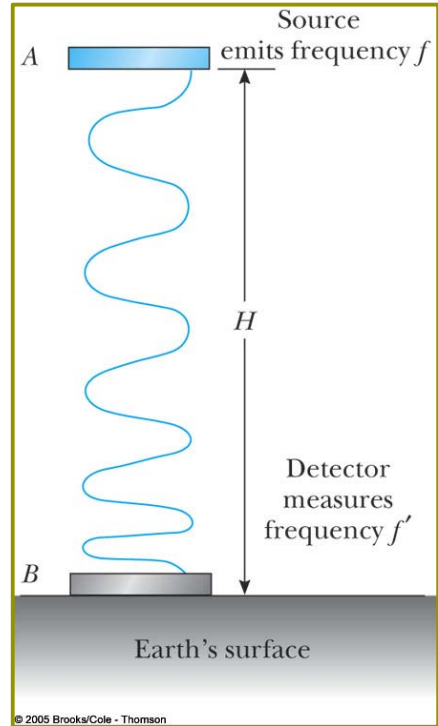
or

$$f' = f(1 + gH/c^2) \quad (3.36)$$

진동수의 상대적인 변화량은

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = \frac{gH}{c^2} \quad (3.37)$$

☞ ⇒ 균일중력장에서의 적색편의



☐ ♣ H=50m인 경우

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{(9.8\text{m/s}^2)(50\text{m})}{(3.0 \times 10^8\text{m/s})^2} = 5.4 \times 10^{-15}$$

☞ ⇒ ◎ 매우 측정이 어려운 작은 이동 (Moessbauer Effect)

☞ ◎ 단색 γ -선 광자의 선포의 1/250

☐ 불균일 중력장에서의 적색편의

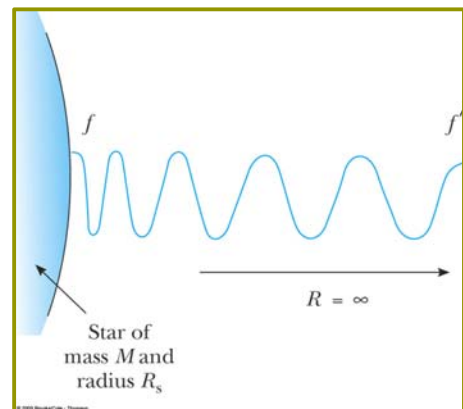
$[KE + PE]_{R=\infty} = [KE + PE]_{R=R_s}$: 에너지 보존

$$hf' - 0 = hf - \frac{GM}{R_s} \left(\frac{hf}{c^2}\right) \quad \text{or} \quad (3.38)$$

$$f' = f \left(1 - \frac{GM}{R_s c^2}\right)$$

◆ 별의 중력에 거슬러서 탈출하는 광자는 그 진동수가 감소(적색으로 이동)한다.

☞ → 중력적 적색편의 (gravitational red shift)



예제 3.9 백색왜성의 적색편이(The Red Shift or White Dwarf)

◆ 백색왜성(white dwarf)

◆ 태양 정도의 질량이 지구 정도의 체적에 압축되어 있는 매우 무겁고 밀집된 별에서 방출된 300nm의 빛의 적색편이를 계산하여라.

<풀이>

(3.39)으로부터

$$\frac{f' - f}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{R_S c^2}$$

$M = 1.99 \times 10^{30} \text{kg}$: 태양의 질량

$R_S = 6.37 \times 10^6 \text{m}$: 지구의 반경

$$\Rightarrow G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2.31 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f} \text{ and } df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \text{ 이므로}$$

$$\left| \frac{df}{f} \right| = \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \Leftarrow \left(\frac{df}{f} = -\frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot d\lambda = -\frac{d\lambda}{\lambda} \right)$$

∴ 파장의 이동은

$$\Delta\lambda = (300\text{nm})(2.31 \times 10^{-4}) = 0.069\text{nm} \approx 0.7 \text{ \AA}$$

→ 관측된 파장 : 300.07nm

Black Hole

$$\frac{GM}{R_S c^2} > 1 \text{ 이면 } \left(K.E + P.E = hf - \frac{GM}{R_s} \cdot \frac{hf}{c^2} < 0 \right) \text{로 부터}$$

1. 탈출하기 위한 에너지가 초기 광자의 에너지보다 더 크다.
2. 광자는 탈출하지 못한다.
3. 주위의 모든 물질과 복사를 빨아 들인다.

♣ black hole 의 관측

블랙홀은 빛을 내지 않으므로 직접 관측되지는 않는다.

보통별과 블랙홀이 짝으로 된 이중성(binary star)를 이용하여 간접적으로 측정한다.

1. 보통별의 공전운동을 관측함으로써
2. X-선 방출영역에서 방출되는 X-선의 측정

$$\Rightarrow \text{Cygnus X-1 : 백조자리, } 2 \sim 10\text{keV, } 10^{30}\text{W}$$

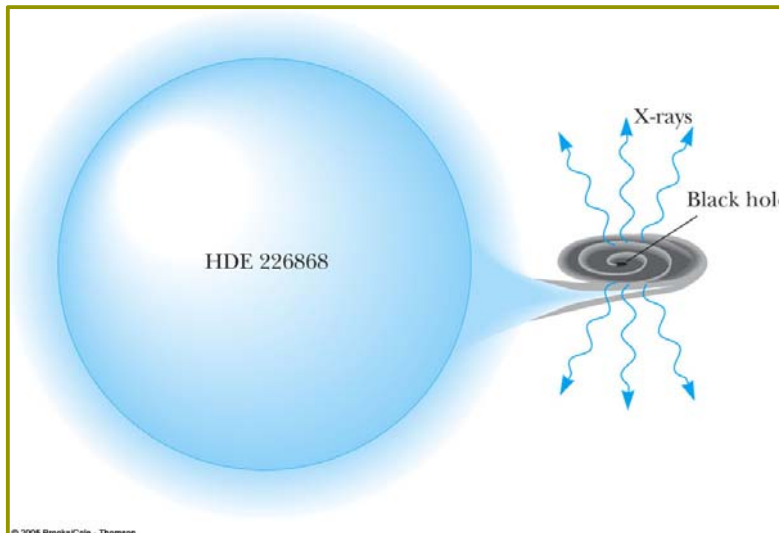


그림 3.27 시그너스 X-1 블랙홀

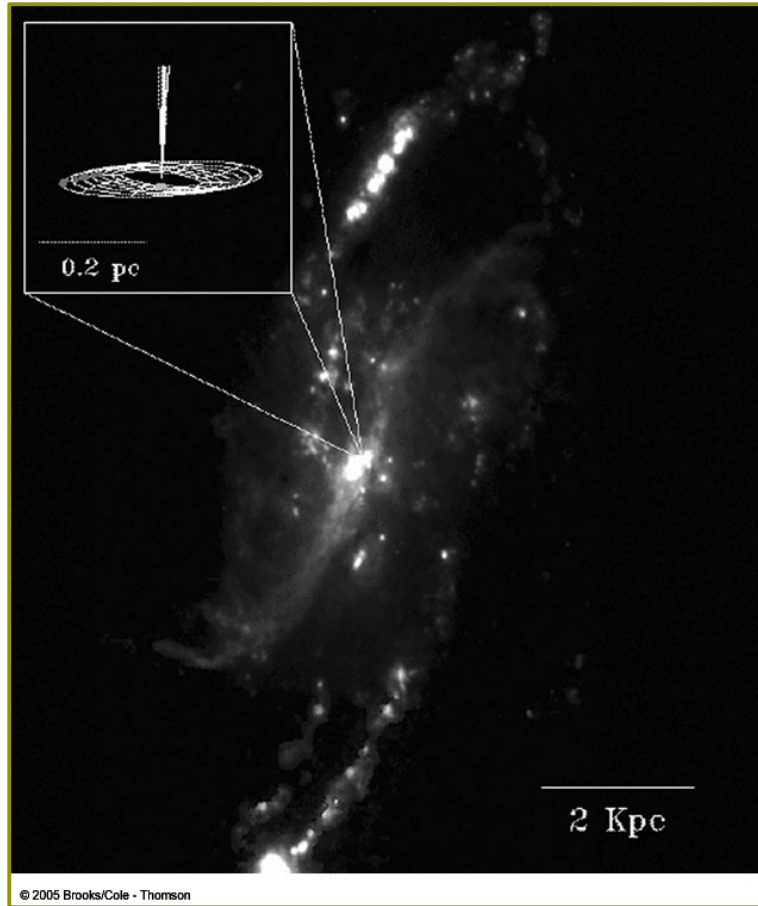


그림 3.28 NGC 4258의 배경 라디오 망원경의 사진

☐ 태양주변을 지나는 별빛의 힘

광자의 굴절이 작은 경우의 근사계산

$$\tan \theta = \frac{v_x}{v_y} \simeq \theta$$

혹은

$$\theta \simeq \frac{|v_x|}{c} \quad (2.42)$$

θ 를 구하기 위하여 태양의 중력으로 편이되어 얻게된 광자의 x-성분 속도를 계산한다.

$$\Delta p_x = m v_x = \int F_x dt$$

P(그림2.29)에 있는 광자(m)에 가해지는 중력의 x-성분은

$$F_x = \left(\frac{GM_S m}{r_0^2 + y^2} \right) \cos \phi = \frac{GM_S m r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.43)$$

$$v_x \simeq GM_S \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{r_0 dt}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad dt = \frac{dy}{v_y} \simeq \frac{dy}{c} \quad \text{을 위 식에 대입하면}$$

$$v_x \simeq \frac{2GM_S r_0}{c} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}}$$

와 같이 표현될 수 있다. 위 식의 적분부분은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} = \left. \frac{y}{r_0^2(y^2 + r_0^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^0$$

$$= -\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{r_0^2(y^2 + r_0^2)^{1/2}} = -\frac{1}{r_0}$$

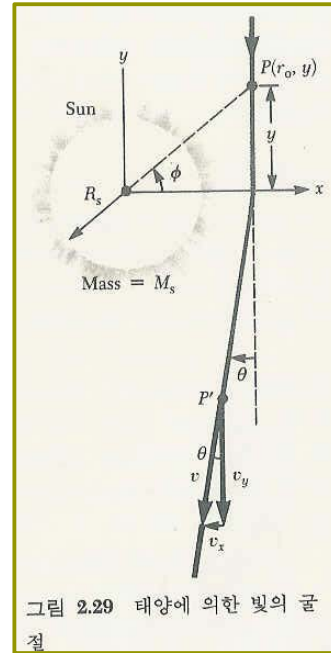
따라서 v_x 는

$$v_x \simeq -\frac{2GM_s}{cr_0}$$

이 결과를 (2.42)에 대입하면

$$\theta \simeq \frac{2GM_S}{c^2 r_0} \quad (2.44)$$

태양의 표면을 스치는 빛(광자)에 대해서 살펴보면



$$r_0 = R_S = 6.96 \times 10^8 \text{m}$$

$$\theta = \frac{(2)(6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{kg})}{(3.00 \times 10^8 \text{m/s})^2 (6.96 \times 10^8 \text{m})}$$

$$= 4.24 \times 10^{-6} \text{rad} = 2.43 \times 10^{-4} \text{deg} = 0.874 \text{ second of arc}$$

Einstein은 1911년에 (2.44)을 발표하였으나 1915년에 공간이 유클리드적이 아니므로-공간은 중력장에 의해 휘어있다- (2.44)가 부정확하다는 것을 깨달았다. 정확한 식은 2배 만큼 커서

$$\theta = 1.74 \text{ 초}$$

1919년, 프렌키섬에서의 일식원정대의 측정

$$\theta = 1.61 \pm 0.03 \text{ 초}$$

“이것은 Newton 이래로 중력에 연관되어 나온 결과 중에서 가장 중요한 것이다....그 결과는 인간 사상 최고의 업적 중의 하나이다.” -J.J.Thomson(당시 왕립협회 회장)

동공속의 파동에 대한 모드 수의 계산

한변이 L 인 정육면체의 공동(cavity)에 갇힌 파동에 대해

$N(f)df : f \sim f + df$ 사이에 있는 정상파의 수

Maxwell의 방정식으로부터 전기장은 시간에 의존하는 부분과 시간에 무관한 부분으로 분리될 수 있다. 시간에 무관한 성분의 전기장은

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$E_x = E_x(x,y,z) \text{ and } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

$E_x = u(x)v(y)w(z)$ 을 가정하면 (A.1)은 다음과 같은 형태의 세 개의 상미분방정식으로 나눌 수 있다.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k_x^2 u = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

(A.2)는 단순조화진동자의 방정식이고, 해는

$$u(x) = B \cos k_x x + C \sin k_x x$$

경계조건 : $E_x = 0 : x = 0, x = L$ 으로부터

$$B = 0$$

$$k_x L = n_x \pi \quad (n_x = 1, 2, 3, \dots)$$

$v(y)$ 와 $w(z)$ 에 대해서도 유사한 해를 얻게되고 따라서

$$E_x(x,y,z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (\text{A.3})$$

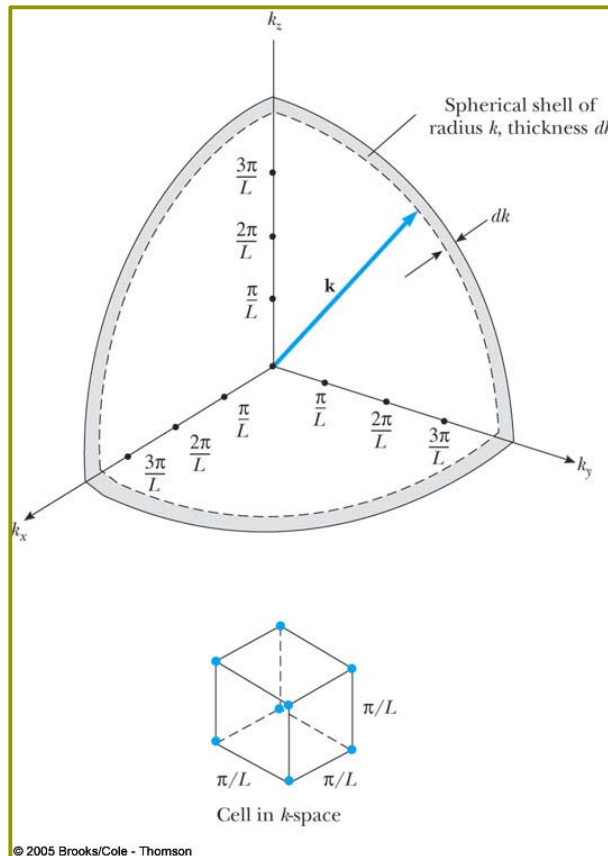


그림 A.1 $k^2 = \pi^2/L^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ 의 기하학적인 해석

모드의 밀도를 결정한다. k -space에서 $(\pi/L)^3$ 의 부피당 하나의 정상파가 존재한다. $k \sim k+dk$ 사이에 있는 정상파의 수 $N(k)$ 는, $k \sim k+dk$ 사이의 부피는 구형 껍질의 1/8이므로

$$N(k)dk = \frac{\frac{1}{2}\pi k^2 dk}{(\pi/L)^3} = \frac{Vk^2 dk}{2\pi^2} \quad (\text{A.4})$$

전자기파에 대해 각 모드마다 두 개의 수직인 편광이 존재하므로 (A.4)의 $N(k)$ 는 두 배로 늘어나게 된다. 단위부피당 정상파의 개수는

$$\frac{N(k)dk}{V} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} \quad (\text{A.5})$$

$$k = 2\pi f/c$$

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (\text{A.6})$$

$$N(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (\text{A.7})$$

□ 플랑크 분포(Planck distribution)

열평형상태에 있는 조화진동자, n 번째 상태에 대한 $(n+1)$ 번째 상태에 있는 진동자수의 비

$$N_{n+1}/N_n = \exp(-\hbar\omega/\tau), \quad \tau \equiv k_B T \quad (3)$$

n 번째 양자상태에 있는 진동자 수의 전체에 대한 비는

$$\frac{N_n}{\sum_{s=0}^{\infty} N_s} = \frac{\exp(-n\hbar\omega/\tau)}{\sum_{s=0}^{\infty} \exp(-s\hbar\omega/\tau)} \quad (4)$$

진동자의 들뜸 양자수(excited quantum number)의 평균은

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_s s \exp(-s\hbar\omega/\tau)}{\sum_s \exp(-s\hbar\omega/\tau)}$$

$x = \exp(-\hbar\omega/\tau)$ 로 두면

$$\sum_s x^s = \frac{1}{1-x}; \quad \sum_s s x^s = x \frac{d}{dx} \sum_s x^s = \frac{x}{(1-x)^2}$$

따라서 플랑크 분포는

$$\langle n \rangle = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/\tau) - 1}$$

$$\bar{E} = \langle n \rangle \hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\tau) - 1}$$